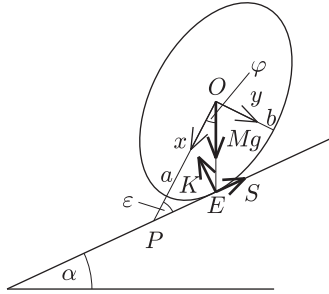


**I. megoldás.** Ha a súrlódás elegendően nagy, az erők egyensúlyának feltétele biztosan teljesülhet, így elegendő a forgatónyomatékok egyensúlyát vizsgálni.



Használjuk az *ábrán* látható jelöléseket! A lejtő által az  $M$  tömegű hengerre kifejtett nyomóerő

$$K = Mg \cos \alpha,$$

a súrlódási erő

$$S = Mg \sin \alpha,$$

így az erők  $O$  pontra vonatkoztatott forgatónyomatékának egyensúlyi feltétele:

$$K \cdot OE \cdot \sin(90^\circ - \varepsilon - \varphi) = S \cdot OE \cdot \sin(\varepsilon + \varphi).$$

(Kihasználtuk, hogy az  $OEP$  háromszög  $E$ -nél levő külső szöge a másik két belső szög,  $\varepsilon$  és  $\varphi$  összege.) Az egyensúlyi feltétel  $Mg \cdot OE$ -vel való egyszerűsítés után így írható:

$$\cos \alpha \cdot \cos(\varepsilon + \varphi) = \sin \alpha \cdot \sin(\varepsilon + \varphi), \quad \text{azaz} \quad \operatorname{tg}(\varepsilon + \varphi) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

(Ez az összefüggés úgy is megkapható, hogy felírjuk az erők eredő forgatónyomatékát az  $E$  pontra vonatkoztatva. Ez az eredő akkor lesz nulla, ha az  $Mg$  gravitációs erő hatásvonala átmegy az  $E$  ponton, tehát  $OE$  függőleges, így a  $K$  nyomóerő  $\alpha$  szöget zár be a függőlegessel, azaz  $\varphi + \varepsilon = 90^\circ - \alpha$ .)

Az *ábrán* látható koordináta-rendszerben az ellipszishez az  $E$  pontban húzott érintő meredeksége:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y},$$

ahol  $x$  és  $y$  az  $E$  pont koordinátái a fenti koordináta-rendszerben. Ez a képlet megtalálható pl. a Függvénytáblázat 74. oldalán, vagy levezethető az ellipszis egyenletéből, miszerint

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(x + \Delta x)^2}{a^2} + \frac{(y + \Delta y)^2}{b^2} = 1.$$

Mivel  $m = -\operatorname{tg} \varepsilon$ , másrészt

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi},$$

fennáll a

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$$

összefüggés. A forgatónyomatékok egyensúlyának feltétele ezek után

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg}(\varepsilon + \varphi) &= \frac{\operatorname{tg} \varepsilon + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \operatorname{tg} \varphi} = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{b^2}{a^2}} \left( \operatorname{tg} \varphi + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \right) \end{aligned}$$

alakba írható. Alkalmazzuk a zárójelben álló kifejezésre a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\operatorname{tg} \varphi + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \geq 2 \sqrt{\operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}} = 2 \frac{b}{a},$$

ahonnan a lejtő szögére az

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \geq \frac{1}{1 - \frac{b^2}{a^2}} \cdot 2 \cdot \frac{b}{a} = \frac{2ba}{a^2 - b^2}$$

feltételt kapjuk. Az ellipszishenger tehát legfeljebb

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a^2 - b^2}{2ab}$$

hajlásszögű lejtőn maradhat egyensúlyban.

**II. megoldás.** Az előző megoldás jelöléseit követve abból a feltételből, hogy egyensúlyban a henger tömegközéppontja, valamint a henger és a lejtő érintkezési pontja ugyanazon a függőleges egyenesen kell elhelyezkedjék, eljuthatunk a

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{1 - \frac{b^2}{a^2}} \left( \operatorname{tg} \varphi + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \right)$$

egyenletig. Ez  $\operatorname{tg} \varphi$ -re nézve másodfokú egyenlet:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi - \frac{1}{1 - \frac{b^2}{a^2}} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \operatorname{tg} \varphi + \frac{b^2}{a^2} = 0,$$

amelynek (nem túl meredek lejtő esetén) 2 gyöke van. Ezek egyike a henger stabil, a másik pedig az instabil egyensúly helyzetét adja meg.

Ha a lejtő hajlásszögét növeljük, a két egyensúlyi helyzetnek megfelelő  $\varphi_{1,2}$  szög közeledik egymáshoz, egy bizonyos  $\alpha_0$  szögnél meredekebb lejtők esetén pedig egyáltalán nem találunk egyensúlyi megoldást. A kritikus hajlásszöget az a feltétel határozza meg, hogy a másodfokú egyenletnek már csak 1 megoldása legyen. Ez akkor következik be, amikor az egyenlet diszkriminánsa nullává válik, vagyis amikor teljesül

$$\left( \frac{1}{1 - \frac{b^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_0} \right)^2 = \frac{4b^2}{a^2}, \quad \text{azaz} \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{a^2 - b^2}{2ab}.$$