

**Megoldás.** Jelöljük a kiindulási állapotot 0-s állapotnak, az a helyzet, amikor a dugattyú éppen hozzáér a rugó végéhez legyen az 1. állapot, és a végállapotra mint 2. állapotra hivatkozunk. A megadott és a keresett fizikai mennyiségeket ennek a jelölésnek megfelelő indexekkel látjuk el, tehát pl. a végállapot  $18 \text{ dm}^3$ -es térfogatát (a kitűzési szöveggel ellentétben)  $V_2$ -vel fogjuk jelölni!

Számoljuk ki az egyes állapotokhoz tartozó nyomást, térfogatot, a dugattyú elmozdulását és az eltelt időt! Ezek ismeretében (a hőtan első főtételét is felhasználva) meghatározhatjuk a gáz belső energiájának változását, a gázon végzett munkát, majd a közölt hőt, illetve a hőleadás teljesítményét.

Kezdőállapotban a héliumgáz nyomása a légköri nyomás és a dugattyú súlyából származó nyomás összege:

$$p = p_0 + \frac{mg}{A} = 10^5 \text{ Pa} + \frac{0,02 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2}{2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2} \approx p_0.$$

(A dugattyú súlyából származó nyomás elhanyagolható a légköri nyomás mellett!) A gáz térfogata

$$V_0 = 0,008 \text{ m}^3.$$

Az 1. állapothoz tartozó térfogat:

$$V_1 = V_0 + Ad = 0,012 \text{ m}^3,$$

a nyomás az 1. állapotban (és a  $0 \rightarrow 1$  folyamat során mindvégig)  $p_1 = p_0$ . A megadott sebességgel mozgó dugattyú

$$t_1 = \frac{d}{v_0} = 4 \text{ s}$$

idő alatt ér az 1. állapotba.

A 2. állapotban a gáz térfogata  $V_2 = 0,018 \text{ m}^3$ , a dugattyú tehát az 1. állapothoz képest

$$\Delta \ell = \frac{V_2 - V_1}{A} = 0,3 \text{ m}$$

távolságnyi el kellett mozduljon, ennyivel nyomta össze a rugót. Ebben az állapotban a rugó által kifejtett erő  $D \cdot \Delta \ell$ , a gáz nyomása tehát

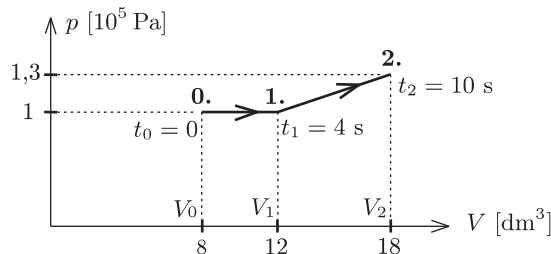
$$p_2 = p_1 + \frac{D \cdot \Delta \ell}{A} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

A dugattyú

$$\Delta t = \frac{\Delta \ell}{v_0} = 6 \text{ s}$$

idő alatt ér az 1. állapotból a gáz 2. állapotának megfelelő helyzetbe, ez tehát az indítást követő 10. másodpercben következik be.

A kiszámított adatok felhasználásával ábrázolhatjuk a héliumgáz állapotváltozását  $p$ - $V$  diagramon. A  $0 \rightarrow 1$  folyamat izobár, az  $1 \rightarrow 2$  folyamat során pedig a nyomás a dugattyú elmozdulásával arányosan növekszik, tehát az állapotváltozást a  $p$ - $V$  diagramon egyenes szakasz szemlélteti (1. ábra). Az ábrán a jellegzetes időpontokat is feltüntettük. A dugattyú egyenletes sebességgel mozog, emiatt a gáz térfogata az idővel egyenes arányban változik.



1. ábra

A termodinamika első főtétele szerint a gázzal közölt  $Q$  hő, a gáz belső energiájának  $\Delta E$  megváltozása és a gáz által végzett  $p\Delta V$  munka között fennáll a

$$Q = \Delta E + p\Delta V$$

összefüggés. Ez a kapcsolat a fenti formában csak kicsiny változásokra érvényes, a gáz teljes állapotváltozása során felvett (vagy leadott) hőt a kicsiny változások járulékaiknak összegzésével kaphatjuk meg. A gáz belső energiáját az

$$E = \frac{f}{2} pV$$

állapotegyenletből kaphatjuk meg, ahol  $f$  a gázmolekulák szabadsági fokainak száma, héliumra  $f = 3$ . A gáz munkavégzését a teljes folyamatra (vagy annak bármely részére) a  $p - V$  diagramon a „görbe alatti területből” olvashatjuk le.

Ezen általános megfontolásokat a jelen feladat  $0 \rightarrow 1$  szakaszára alkalmazva a fűtőszál által közölt hőre

$$Q_{0 \rightarrow 1} = \frac{3}{2} p_0 (V_1 - V_0) + p_0 (V_1 - V_0) = 1000 \text{ J}$$

adódik. Mivel ez a hőátadás időben egyenletesen történt, a fűtőszál pillanatnyi teljesítménye időben állandó és az átlagteljesítménnyel egyezik meg:

$$P(t) = \bar{P}_{0 \rightarrow 1} = \frac{Q_{0 \rightarrow 1}}{t_1} = \frac{1000 \text{ J}}{4 \text{ s}} = 250 \text{ W}.$$

Hasonló módon számolható a folyamat második felében közölt hő is:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{3}{2} (p_2 V_2 + p_0 V_1) + \frac{1}{2} (p_2 + p_0) (V_2 - V_1) = 2400 \text{ J}.$$

Az átlagos fűtőteljesítmény ebben a szakaszban

$$\bar{P}_{1 \rightarrow 2} = \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{t_2 - t_1} = 400 \text{ W},$$

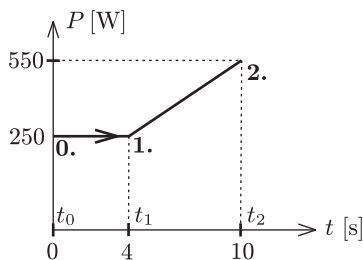
de a pillanatnyi teljesítmény itt már *nem állandó*, hanem időben *egyenletesen* változva növekszik. Ezt úgy láthatjuk be, hogy meggondoljuk: a gáz által időegységenként felvett hő

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{3}{2} \frac{\Delta(pV)}{\Delta t} + \frac{p \Delta V}{\Delta t} = \frac{5}{2} p \frac{\Delta V}{\Delta t} + \frac{3}{2} V \frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

Tekintve, hogy a gáz térfogata is és a nyomása is az idővel arányosan nő, a  $\frac{\Delta V}{\Delta t}$  és  $\frac{\Delta p}{\Delta t}$  hányadosok időben nem változnak, az őket szorzó  $p$ , illetve  $V$  mennyiségek viszont időben egyenletesen nőnek, tehát a pillanatnyi fűtőteljesítmény egész kifejezésének is időben egyenletesen kell növekednie. Kezdetben (az 1. állapotban) a fűtőteljesítmény a korábbi 250 W-tal egyezik meg, átlagértéke – mint láttuk – 400 W, a legnagyobb értéke tehát (a 2. állapotban) 550 W kell legyen.

A pillanatnyi fűtőteljesítményt az idő függvényében a 2. ábra mutatja. Ennek görbe alatti területéből ugyancsak leolvasható, hogy a fűtőszál által közölt teljes hő:

$$1000 \text{ Ws} + 2400 \text{ Ws} = 3400 \text{ J}.$$



2. ábra