I. megoldás. Minden téglatestet azonosítsunk az $(x;y;z)$ számhármassal, ahol x, y és z a test megfelelő irányú méretei.

Az $(a;b;c)$ tartalmazza $(d;e;f)$-et, ha $a \geq d$, $b \geq e$ és $c \geq f$ (ha mindhárom helyen egyenlőség áll, akkor a két téglatest megegyezik, a tartalmazás ebben az esetben is fennáll). Válasszunk ki a halmazból egy tetszőleges téglatestet, $(a;b;c)$-t. Tegyük fel, hogy nincs olyan téglatest, amely ezt tartalmazná. Ez azt jelenti, hogy $(a;b;c)$-n kívül minden téglatest az alábbi három halmaz valamelyikének (akár több halmaznak is) eleme:

$$\begin{aligned} A&\colon \bigl\{(x;y;z) \mid x < a\bigr\};\\ B&\colon \bigl\{(x;y;z) \mid y < b\bigr\};\\ C&\colon \bigl\{(x;y;z) \mid z < c\bigr\}. \end{aligned}$$

Mivel $|A \cup B \cup C| = \infty$, a három halmaz valamelyikének számossága végtelen. Legyen ez a halmaz pl. A. Ekkor van végtelen sok téglatestünk, amelyekre $x \in \{0, 1, \ldots, a-1\}$. Tehát van olyan $x_0 \in \{0, 1, \ldots, a-1\}$ szám, amelyre végtelen sok téglatest esetén $x = x_0$. Vagyis van végtelen sok téglatestünk ugyanazzal az x koordinátával. Ezzel a feladatot visszavezettük 2 dimenzióra.

Azonosítsuk a fenti téglalapok mindegyikét az $(y;z)$ számpárral, ahol y és z a téglalap megfelelő irányú méretei. Válasszunk ki egy $(b;c)$ téglalapot. Ha ezt semelyik másik nem tartalmazza, akkor $(b;c)$-n kívül a többi téglalapot két halmazba (egyet akár többe is) tudjuk sorolni:

$$\begin{aligned} A&\colon \bigl\{(y;z) \mid y < b\bigr\};\\ B&\colon \bigl\{(y;z) \mid z < c\bigr\}. \end{aligned}$$

Vagy az A, vagy a B halmaz végtelen számosságú; legyen mondjuk az A halmaz. Ekkor végtelen sok olyan téglalap van, amelyre $y \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, így valamely $y_0 \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ számra végtelen sok téglalap jut. Tehát, visszatérve a térbe, van végtelen sok téglatest, amelynek első két koordinátája megegyezik. Válasszunk ki közülük kettőt. Ezek közül az egyiknek a harmadik koordinátája nagyobb, vagy ugyanakkora, mint a másiké, tehát tartalmazza azt.

Beláttuk, hogy mindig van két téglatest úgy, hogy az egyik tartalmazza a másikat.

II. megoldás. Bizonyítsunk teljes indukcióval: a dimenziók számát növeljük az indukció során. Egy dimenzióban, vagyis $n = 1$-re igaz az állítás: Tetszőlegesen kiválasztunk két szakaszt, az egyiknek az origótól különböző csúcspontja messzebb van az origótól, mint a másiknak, így tartalmazza azt. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$-ra, és bizonyítsuk be $n = k+1$ dimenzióra. A koordináta-tengelyeket jelölje $z_1; z_2; \ldots; z_{k+1}$. Tekintsünk két $k+1$ dimenziós téglatestet, melyek origóval szemközti csúcsának koordinátái legyenek

$$(a_1; a_2; \ldots; a_{k+1}) \quad \text{és} \quad (b_1; b_2; \ldots; b_{k+1}).$$

Ha az előbbi tartalmazza az utóbbit, akkor

$$a_1 \geq b_1; \quad a_2 \geq b_2; \quad \ldots; \quad a_{k+1} \geq b_{k+1}.$$

Válasszunk ki egy tetszőleges X téglatestet, origóval szemközti csúcsának koordinátái legyenek $X(x_1; x_2; \ldots; x_{k+1})$. Megmutatjuk, hogy csak véges sok olyan $Y(y_1; y_2; \ldots; y_{k+1})$ téglatest létezhet, amelyek egyike sem tartalmazza X-et, sem valamelyik másik Y téglatestet. Ha Y nem tartalmazza X-et, akkor valamely i-re $y_i < x_i$.

Ha $y_1 < x_1$, akkor y_1 értéke $(x_1 - 1)$-féle lehet. Vegyük ekkor y_1 minden értékére az összes olyan téglatestet, melynek első koordinátája y_1. Ezek origóval szemközti csúcsai a $z_1 = y_1$ egyenletű k dimenziós térben vannak, vagyis ha egy ilyen tulajdonságú téglatest tartalmaz egy másikat, akkor ez a testek erre a k dimenziós térre vett merőleges vetületére is igaz. Az indukciós feltétel szerint azonban ha ebben a térben van végtelen sok ilyen tulajdonságú téglatest, akkor azok közül az egyik tartalmaz egy másikat. Ha ezt el akarjuk kerülni, akkor csak véges sok olyan téglatest lehet ($k+1$ dimenziós), amelyik első koordinátája az adott y_1 érték, és ez minden y_1-re igaz.

Ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazzuk minden y_i-re, és mivel minden y_i és i is véges sok értéket vehet csak fel, eddig csak véges sok téglatest létezhet úgy, hogy egyik se tartalmazzon egy másikat. Azonban végtelen sok téglatestünk van, ezért vagy az előzőek közül tartalmaz valamelyik egy másikat, vagy van olyan, amelyre $y_1 \geq x_1$; $y_2 \geq x_2$; $\ldots$; $y_{k+1} \geq x_{k+1}$, vagyis amelyik tartalmazza X-et. Az állítás tehát tetszőleges n dimenzióban igaz, így 3 dimenzióban is.

III. megoldás. A megoldáshoz használjuk fel a következő segédtételt: Ha az $\{a_n\}$ végtelen sorozat elemei pozitív egész számok, akkor az $\{a_n\}$ sorozat elemeiből kiválasztható egy (végtelen sok elemű) monoton növő részsorozat. Ennek a bizonyítása a következő: Indirekt módon tegyük fel, hogy csak egy véges sok elemből álló, tovább nem bővíthető monoton növő részsorozatot tudtunk kiválasztani; ennek az utolsó eleme legyen a_m. Ez azt jelenti, hogy a sorozat m-nél magasabb indexű elemei mind kisebbek, mint a_m. Mivel a_m-nél kisebb egész szám csak véges sok van, lennie kell legalább egy olyan a_m-nél kisebb számnak, amiből végtelen sok van az a_m utáni elemek között. Viszont ez a végtelen sok egyenlő szám egy monoton növekvő részsorozatát adja $\{a_n\}$-nek. Így ellentmondásra jutottunk, tehát biztosan kiválasztható végtelen elemszámú monoton növő részsorozat.

A téglatesteket továbbra is az origóval átellenes csúcsuk koordinátáival, az $(x; y; z)$ számhármassal jellemezzük. Egy $(x_1; y_1; z_1)$ téglatest pontosan akkor tartalmazza az $(x_2; y_2; z_2)$ téglatestet, ha a koordinátáikra igaz, hogy $x_1 \geq x_2$, $y_1 \geq y_2$, $z_1 \geq z_2$.

Állítsuk sorba a téglatesteket úgy, hogy az x koordinátájuk növekvő sorozatot alkosson. Ekkor a téglatestek y koordinátájának sorozata egy pozitív egész számokból álló sorozat. A segédtétel szerint ki lehet választani az y koordináták közül egy monoton növő végtelen részsorozatot. Ennek a részsorozatnak az elemeihez tartozó téglatestek z koordinátája ugyancsak pozitív egész számokból álló sorozat, tehát ebből is ki lehet választani egy monoton növő végtelen sorozatot. Ezért ezekhez a koordinátákhoz tartozó téglalapokra igaz, hogy az x, az y és a z koordinátájuk sorozata is monoton növő sorozatot alkot, ezért minden magasabb indexű téglatest tartalmazza az alacsonyabb indexűt. Tehát a feladat állításánál többet is bizonyítottunk: Végtelen sok olyan téglatest van, hogy ebből bármelyik kettő közül az egyik tartalmazza a másikat.