Megoldás. Tekintsünk egy 2 sorból és $t+m$ oszlopból álló üres táblázatot. Nézzük a táblázat azon kitöltéseit, amelyek kielégítik az alábbi feltételeket:

– Minden mezőbe vagy egy 1, vagy egy 0 számjegy kerül;

– A felső sor első t mezőjébe 1-es kerül;

– Ha bárhol a felső sorban egy 0 áll, akkor közvetlenül alatta is 0 van;

– Az alsó sorban pontosan m darab 1-es van.

A feladat állításának bizonyításához megmutatjuk, hogy mindkét kifejezés a megfelelő kitöltések számát határozza meg.

Hogyan kaphatunk egy helyes kitöltést?

I. módszer: A felső sor utolsó m mezőjébe pontosan k helyre 1-es kerüljön, a többi helyre 0 $(0 \le k \le m)$. Ezt k függvényében $\binom{m}{k}$-féleképpen tehetjük meg. Ebben a sorban ekkor pontosan $t+k$ darab 1-es van. Az alsó sor m darab 1-ese csak a felső sor $t+k$ darab 1-ese alá kerülhet, nekik $\binom{t+k}{m}$-féleképpen választhatunk helyet. A többi helyre 0 kerül.

Ez adott k esetén $\binom{m}{k}\binom{t+k}{m}$ kitöltést jelent, összesen

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{t+k}{m}$$

helyes kitöltést, ami a bizonyítandó egyenlőség bal oldalán található kifejezés.

II. módszer: Az alsó sor m darab 1-ese közül k darabot $(0 \le k \le m)$ az első t oszlopba rakunk, ezt k függvényében $\binom{t}{k}$-féleképpen tehetjük meg.

Az alsó sor utolsó m mezőjébe pontosan $m-k$ darab 1-es kerül, nekik $\binom{m}{m-k}=\binom{m}{k}$-féleképpen adhatunk helyet.

Az alsó sort k függvényében $\binom{t}{k}\binom{m}{k}$-féleképpen tölthetjük ki, a felső sor utolsó m mezője viszont még üres.

Közülük pontosan $m-k$ mező alatt az alsó sorban 1-es áll, így ebben az $m-k$ mezőben is biztosan 1-esek állnak. A többi, $m-(m-k)=k$ darab üres mezőt szabadon, összesen 2^k-féleképpen tölthetjük ki.

A k függvényében így $\binom{m}{k}\binom{t}{k}\cdot 2^k$ darab kitöltés létezik, ez összesen

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{t}{k}\cdot 2^k$$

helyes kitöltést jelent. Ez pedig a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalán található kifejezés.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzés. A fentitől különböző megoldás található Hajnal Péter: *Elemi kombinatorikai feladatok* c. könyvében (3.17/l, 14. o.), illetve Lovász László: *Kombinatorikai problémák és feladatok* c. könyvében (§1. 43/a, 20. o.). Azok a diákok, akik csak hivatkoztak erre, de nem írták le a megoldást, a versenykiírás értelmében 0 pontot kaptak.