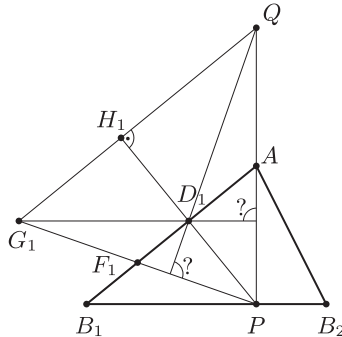


I. megoldás. Megmutatjuk, hogy QD_i pontosan akkor merőleges PF_i -re, ha PA merőleges B_1B_2 -re. Ebből a feladat állítása nyilván következik.

Az AB_1B_2 háromszög hegyesszögű, ezért D_i az AB_i szakasz belső pontja. Legyen P -nek az F_i -re vonatkozó tükörképe G_i . Mivel F_i felezi a B_iD_i szakaszt, azért a $PB_iG_iD_i$ négyszög középpontosan szimmetrikus, vagyis paralelogramma. Tehát G_iD_i párhuzamos PB_i -vel, s így B_1B_2 -vel is. Nagyítsuk a PAF_i háromszöget P -ből kétszeresére. A nagyításnál A képe Q , F_i képe G_i , D_i képe pedig az H_i pont, amely a P -ből QG_i -re állított merőleges talppontja (lásd *ábra*).



A PQG_i háromszögben tehát PH_i magasságvonal. Vizsgáljuk meg, hogy az erre illeszkedő D_i pont mikor lesz a háromszög magasságpontja. Ez pontosan akkor következik be, ha a háromszögnek még egy magasságvonala átmegy D_i -n. (Ekkor persze mindhárom magasságvonal átmegy D_i -n.) A QD_i egyenes pontosan akkor magasságvonal, ha QD_i merőleges PG_i -re, azaz PF_i -re, a G_iD_i egyenes pedig pontosan akkor magasságvonal, ha G_iD_i merőleges PQ -ra, azaz ha a G_iD_i -vel párhuzamos B_1B_2 merőleges AP -re. Vagyis QD_i pontosan akkor merőleges PF_i -re, ha PA merőleges B_1B_2 -re, mert mindkettő akkor következik be, ha D_i a PQG_i háromszög magasságpontja.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

II. megoldás. Állításunk bizonyításához indítsunk A -ból helyvektorokat és jelöljük ezeket a megfelelő kisbetűkkel, azaz legyen tetszőleges X pont esetén $\overrightarrow{AX} = \mathbf{x}$. Ekkor Q és F_i definíciója miatt $\mathbf{q} = -\mathbf{p}$ és $2\mathbf{f}_i = \mathbf{b}_i + \mathbf{d}_i$. Mivel PD_i merőleges AB_i -re, s így AD_i -re is, a megfelelő vektorok skaláris szorzata 0, azaz $(\mathbf{p} - \mathbf{d}_i)\mathbf{b}_i = 0$ és $(\mathbf{p} - \mathbf{d}_i)\mathbf{d}_i = 0$. Vagyis

$$\mathbf{p}\mathbf{b}_i = \mathbf{d}_i\mathbf{b}_i \quad \text{és} \quad \mathbf{p}\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_i^2.$$

A QD_i szakasz pontosan akkor merőleges PF_i -re, ha

$$(\mathbf{d}_i - \mathbf{q})(2\mathbf{p} - 2\mathbf{f}_i) = 0,$$

amibe behelyettesítve \mathbf{f}_i -t és \mathbf{q} -t, valamint felhasználva az (1) egyenlőségeket kapjuk, hogy

$$(\mathbf{d}_i + \mathbf{p})(2\mathbf{p} - \mathbf{b}_i - \mathbf{d}_i) = 0,$$

$$2\mathbf{p}\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_i\mathbf{b}_i - \mathbf{d}_i^2 + 2\mathbf{p}^2 - \mathbf{p}\mathbf{b}_i - \mathbf{p}\mathbf{d}_i = 0,$$

$$(\mathbf{p}\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_i^2) - (\mathbf{b}_i\mathbf{d}_i + \mathbf{p}\mathbf{b}_i) + 2\mathbf{p}^2 = 0,$$

azaz $2\mathbf{p}^2 = 2\mathbf{p}\mathbf{b}_i$ vagyis $\mathbf{p}(\mathbf{p} - \mathbf{b}_i) = 0$.

Mivel sem \mathbf{p} sem $\mathbf{p} - \mathbf{b}_i$ nem nullvektor, ez pontosan akkor teljesül, ha a két vektor merőleges egymásra, azaz ha AP merőleges PB_i -re. Tehát $i = 1, 2$ -re vagy egyszerre merőleges mindkét pár, vagy egyik pár sem merőleges. Ez épp a bizonyítandó állítás. (A bizonyítás során nem használtuk ki, hogy az AB_1B_2 háromszög hegyesszögű.)