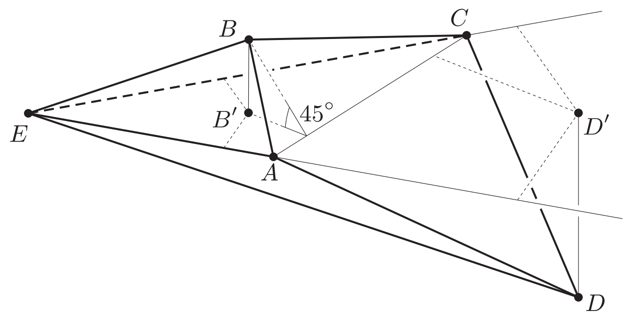
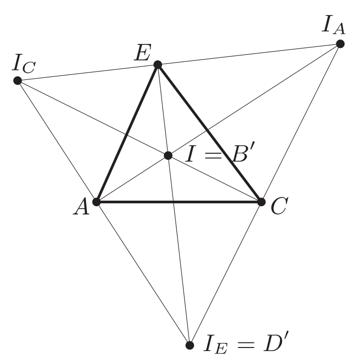
Megoldás. Jelöljük a B és a D pontok merőleges vetületét az ACE síkon B'-vel, illetve D'-vel. Mivel az ABC, ABE és BCE síkok egyaránt 45°-os szöget zárnak be az ACE síkkal, a B' pont távolsága az AC, AE és CE egyenesek mindegyikétől éppen BB', függetlenül attól, hogy B' az egyeneseknek melyik oldalára esik. Hasonlóképpen, a D' pont távolsága az AC, AE és CE egyenesek mindegyikétől éppen DD' (*1. ábra*).



1. ábra

Négy olyan pont van az ACE háromszög síkjában, ami egyenlő távolságra van az AC, AE, CE egyenesektől; a háromszög beírt körének, valamint a három hozzáírt körének középpontja. Jelölje ezeket I, illetve a szokásos indexeléssel I_A, I_C és I_E; a B' és a D' pont ezek közül kettő.

Mivel az ABE és az ADE síkok, illetve a BCE és a CDE síkok szimmetrikusak az ACE síkra, az EB és az ED egyenesek is egymás tükörképei. Az EB és ED egyenesek merőleges vetülete az ACE síkra tehát egybeesik; a B' és D' pont az AEC szögnek ugyanazon a (belső vagy külső) szögfelezőjén van.



2. ábra

Ha B' és D' az AEC szög belső szögfelezőjén van, akkor egyikük I, a másik I_E. Mivel B és D szerepe felcserélhető, feltehetjük, hogy $B' = I$ és $D' = I_E$ (*2. ábra*). A Pitagorasz-tételt felírva az ABB', ADD' és $AB'D'$ derékszögű háromszögekre,

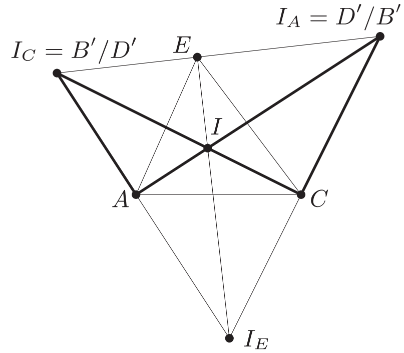
$$AB^2 + AD^2 = (AB'^2 + BB'^2) + (AD'^2 + DD'^2) =$$
$$= (AB'^2 + AD'^2) + BB'^2 + DD'^2 = B'D'^2 + BB'^2 + DD'^2.$$

Hasonlóan, az A helyére C-t írva,

$$BC^2 + CD^2 = (B'C^2 + BB'^2) + (CD'^2 + DD'^2) =$$
$$= (B'C^2 + CD'^2) + BB'^2 + DD'^2 = B'D'^2 + BB'^2 + DD'^2.$$

Azt kaptuk, hogy $AB^2 + AD^2 = BC^2 + CD^2$, az állítás tehát teljesül.

Most vizsgáljuk azt az esetet, amikor B' és D' az AEC szög külső szögfelezőjén van, vagyis egyikük I_A, a másik I_C. Az $AB'CD'$ négyszög, ami a gúla $ABCD$ alaplapjának merőleges vetülete az ACE síkra, mindkét esetben hurkolt (*3. ábra*), ami ellentmondás. Ez az eset tehát nem lehetséges.



3. ábra

Megjegyzések. 1. A bizonyítandó egyenlőség a hurkolt esetben is teljesül.

2. A versenyzők többsége indoklás nélkül feltételezte, hogy a gúla konvex, és nem vizsgálta azt az esetet, amikor az ACE háromszög két oldallappal is 135°-os szöget zár be. (Ez az oka a sok 4 pontos dolgozatnak.) Ha az ACE sík mindegyik oldallappal ugyanakkora szöget zár be, akkor a konkáv eset valóban nem lehetséges (csak a hurkolt), de ez mindenképpen indoklásra szorul.