I. megoldás. Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd rendezve:

$$\sqrt{2-x}+\sqrt{15+x}=9-2\sqrt[4]{(2-x)(15+x)}.$$

Ismét négyzetre emelve:

$$(2-x)+(15+x)+2\sqrt{(2-x)(15+x)}=$$
$$=81+4\sqrt{(2-x)(15+x)}-36\sqrt[4]{(2-x)(15+x)}.$$

Legyen $a=\sqrt[4]{(2-x)(15+x)}$. Ekkor

$$17+2a^2=81+4a^2-36a,$$
$$0=2a^2-36a+64.$$

Innen $a=16$ vagy $a=2$.

Ha $a=16$, akkor a $16=\sqrt[4]{(2-x)(15+x)}$ egyenlet mindkét oldalát negyedik hatványra emelve, majd rendezve a $0=x^2+13x+65\,506$ egyenletet kapjuk. Ennek negatív a diszkriminánsa, tehát nincs megoldása.

Ha $a=2$, akkor a $2=\sqrt[4]{(2-x)(15+x)}$ egyenlet mindkét oldalát negyedik hatványra emelve, majd rendezve a $0=x^2+13x-14$ egyenletet kapjuk. Ennek megoldása $x_1=-14$ és $x_2=1$, mindkét gyök megoldása az eredeti egyenletnek is.

II. megoldás. Legyen $a=\sqrt[4]{2-x}$, $b=\sqrt[4]{15+x}$. Ekkor $a+b=3$, valamint $a^4+b^4=17$. Írjuk fel az $(a+b)^4$ hatványt, majd alakítsuk át:

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4=17+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3.$$

Felhasználva, hogy $(a+b)^4=81$, a következő egyenletet kapjuk:

$$32=2a^3b+3a^2b^2+2ab^3=ab(2a^2+3ab+2b^2)=ab\big(2(a+b)^2-ab\big)=ab(18-ab).$$

A zárójelet felbontva és nullára redukálva:

$$(ab)^2-18ab+32=0.$$

Ez az egyenlet ab-re nézve másodfokú, megoldása: $ab=16$, illetve $ab=2$. Ezekből $a=3-b$ felhasználásával: $(3-b)b=16$, vagy $(3-b)b=2$. Így b-re két másodfokú egyenletet kapunk. Az elsőnek a diszkriminánsa negatív, tehát nincs valós gyöke. A második egyenletből: $b_1=2$, $b_2=1$. Innen: $\sqrt[4]{15+x}=2$, $x_1=1$; $\sqrt[4]{15+x}=1$, $x_2=-14$. Mindkét x érték megoldása az eredeti egyenletnek is.

III. megoldás. Legyen

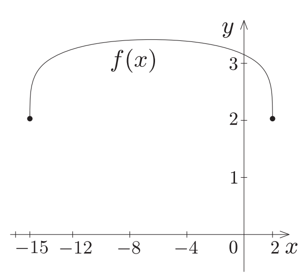
$$f(x)=\sqrt[4]{2-x}+\sqrt[4]{15+x},$$

ahol $x\in[-15,2]$. Végezzünk függvényvizsgálatot. Számítsuk ki először az elsőrendű deriváltat:

$$f'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{(2-x)^3}}\cdot(-1)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{(15+x)^3}}\cdot(+1)=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(15+x)^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(2-x)^3}}\right).$$

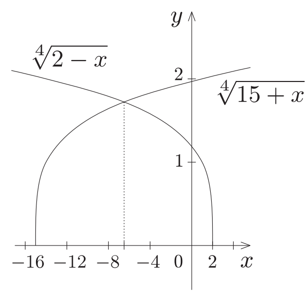
Ez csak akkor lehet 0, ha $x\neq-15$ és $x\neq2$ mellett

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(15+x)^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{(2-x)^3}},$$
$$15+x=2-x,\qquad x=-6{,}5.$$



Felhasználva, hogy a $]-15;2[$ intervallumon az $f'(x)$ végig értelmezve van, és pl. $f'(-7)>0$, és $f'(0)<0$, kapjuk, hogy $f'(x)$ a $]-15;-6{,}5[$ intervallumon pozitív, így itt $f(x)$ szigorúan monoton nő; a $]-6{,}5;2[$ intervallumon negatív, így itt $f(x)$ szigorúan monoton csökken; végül mivel $f'(x)$ a $-6{,}5$-ben 0, és előjelet vált, így itt $f(x)$-nek maximuma van. Ennek értéke: $f(-6{,}5)\approx 3{,}415>3$. Tehát az f függvény két helyen veszi föl a 3-at az adott intervallumon. Mivel $f(1)=f(-14)=3$, és $f(-15)=f(2)\approx 2{,}03$, azért az egyenletnek két megoldása van: $x=1$ és $x=-14$.

Megjegyzés. Ábrázolva $f(x)$ két tagját külön-külön, az *ábráról* sejthető, hogy a metszéspontban ($x=-6{,}5$) lesz a két függvény összegének értéke maximális, hiszen a metszéspontra szimmetrikus a két függvény, és pl. a metszésponttól jobbra $\sqrt[4]{2-x}$ „jobban" csökken, mint amennyire $\sqrt[4]{15+x}$ nő.



Valóban, mivel a $g(x)=\sqrt[4]{x}$ függvény szigorúan konkáv, azért az f függvény értéke $-6{,}5$-nél kisebb, illetve nagyobb x-ekre:

$$f(-6{,}5+\varepsilon)=f(-6{,}5-\varepsilon)=\sqrt[4]{8{,}5-\varepsilon}+\sqrt[4]{8{,}5+\varepsilon}=$$
$$=2\cdot\left[0{,}5\cdot\sqrt[4]{8{,}5-\varepsilon}+0{,}5\cdot\sqrt[4]{8{,}5+\varepsilon}\right],$$

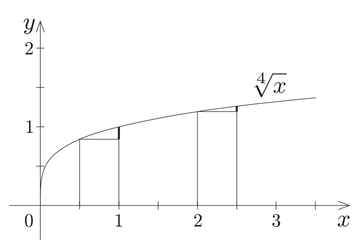
ami a Jensen-egyenlőtlenség szerint $\varepsilon>0$ miatt kisebb, mint

$$2\cdot\sqrt[4]{0{,}5\cdot 2\cdot 8{,}5}=2\cdot\sqrt[4]{8{,}5}=f(-6{,}5).$$

Ezzel csak azt mutattuk meg, hogy az $f(x)$ függvény $x=-6{,}5$-nél veszi fel a maximumát, azt nem, hogy minden más értéket a $[-15;6{,}5[$ és a $[-6{,}5;2]$ intervallumban is csak egyszer-egyszer vesz föl. Ha megnézzük a $g(x)=\sqrt[4]{x}$ grafikonját, látható, hogy „jobbra" haladva a növekedése lelassul, amiből már következik, hogy $\delta>\varepsilon$ esetén

$$f(-6{,}5+\delta)<f(-6{,}5+\varepsilon).$$

($\sqrt[4]{8{,}5-\delta}+\sqrt[4]{8{,}5+\delta}<\sqrt[4]{8{,}5-\varepsilon}+\sqrt[4]{8{,}5+\varepsilon}$, $\sqrt[4]{8{,}5+\delta}-\sqrt[4]{8{,}5+\varepsilon}<\sqrt[4]{8{,}5-\varepsilon}-\sqrt[4]{8{,}5-\delta}$, ami az *ábrán* szemléltetett két szakaszhoz hasonlóan ábrázolható.)



Pontos bizonyítás a III. megoldásban is használt deriválással adható.