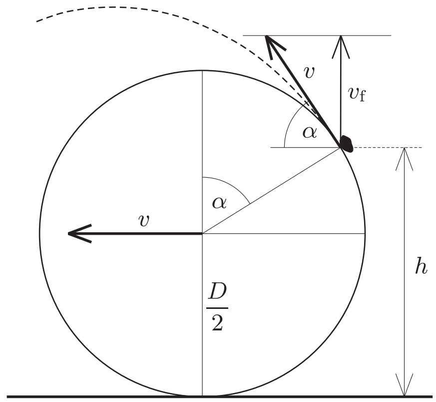
I. megoldás. A traktorkeréken lévő sárdarab – még a leválása előtt – v sebességű vízszintes irányú haladó mozgást és $\frac{2v}{D}$ szögsebességű forgómozgást végez. Amikor a sárdarab leválik a kerékről, akkor (a leválás helye által meghatározott h magasságból és meghatározott kezdősebességgel indulva) ferde hajításnak megfelelően mozog tovább. A levegőben töltött t időt a h magasság és a kezdősebesség függőleges komponense határozza meg, a vízszintes mozgás az esési idő szempontjából érdektelen.



1. ábra

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a sárdarab az *1. ábrán* látható, az α szöggel jellemezhető helyzetben válik el a keréktől. A sárdarab magassága ekkor

$$h = \frac{D}{2}(1+\cos\alpha),$$

kezdősebességének függőleges komponense pedig

$$v_\mathrm{f} = v\sin\alpha.$$

A levegőben töltött időt – bármilyen α szög esetén – a függőleges mozgásra felírható

$$-\frac{g}{2}\cdot t^2 + v_\mathrm{f}\cdot t = -h, \tag{1}$$

vagyis a

$$-\frac{g}{2}\cdot t^2 + v\sin\alpha\cdot t = -\frac{D}{2}\,(1+\cos\alpha) \tag{2}$$

egyenletből (annak pozitív gyökét választva) határozhatjuk meg:

$$t(\alpha) = \frac{v}{g}\left[\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{Dg}{v^2}(1+\cos\alpha)}\,\right]. \tag{3}$$

A $t(\alpha)$ függvény maximumát (vagyis a leghosszabb esési időt) differenciálszámítással, (3) jobb oldalának α szerinti deriválásával határozhatjuk meg. A szélsőértéknél a derivált eltűnik:

$$\frac{\mathrm{d}t(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{v}{g}\left[\cos\alpha + \frac{\sin\alpha\cos\alpha - \frac{Dg}{2v^2}\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{Dg}{v^2}(1+\cos\alpha)}}\right] = 0.$$

A fenti egyenletből algebrai átalakításokkal kapjuk:

$$\frac{Dg}{2v^2}\sin\alpha - \sin\alpha\,\cos\alpha = \cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{Dg}{v^2}(1+\cos\alpha)}\,,\ \left(\frac{Dg}{2v^2}\sin\alpha - \sin\alpha\,\cos\alpha\right)^2 = \cos^2\alpha\cdot\left[\sin^2\alpha + \frac{Dg}{v^2}(1+\cos\alpha)\right],\ \left(\frac{Dg}{2v^2}\right)^2 \sin$$

Innen a

$$\sin^2\alpha = (1+\cos\alpha)\cdot(1-\cos\alpha)$$

azonosság és $1+\cos\alpha \neq 0$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$\left(\frac{Dg}{4v^2} - \cos\alpha\right) \cdot (1 - \cos\alpha) = \cos^2\alpha,$$

vagyis

$$\frac{Dg}{4v^2} - \frac{Dg}{4v^2} \cdot \cos\alpha - \cos\alpha = 0,$$

azaz

(4) $$\cos\alpha = \frac{gD}{gD + 4v^2}.$$

Ez az összefüggés határozza meg a leghosszabb repülési időhöz tartozó α „sárleválási helyzetet”. (4)-et (3)-ba visszahelyettesítve további algebrai átalakítások után a repülési idő maximumális értékére a

$$t_{\max} = \frac{\sqrt{4v^2 + 2gD}}{g}$$

formulát kapjuk.

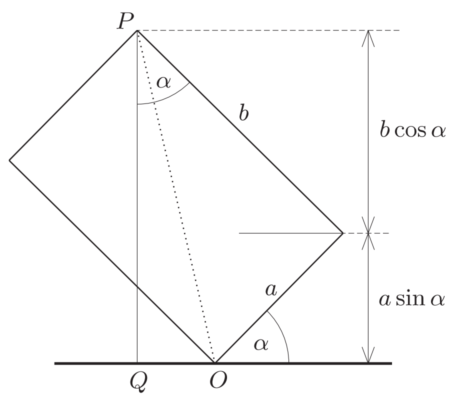
II. megoldás. A feladatot elemi úton (differenciálszámítás nélkül) is meg lehet oldani. Induljunk ki (az I. megoldás jelöléseit használva) a függőleges hajítás (2) egyenletéből, melyet átrendezéssel

(5) $$\frac{g}{2} \cdot t^2 - \frac{D}{2} = +v\sin\alpha \cdot t + \frac{D}{2}\cos\alpha$$

alakra hozhatunk. Nyilván elegendő a $0 < \alpha < 180°$ esetekkel foglalkoznunk, ezekre pedig – tetszőleges a és b pozitív számokkal – érvényes az

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

egyenlőtlenség.



2. ábra

Tekintsük ugyanis a *2. ábrán* látható, a és b oldalélű téglalapot, amelynek egyik (O jelű) csúcsa egy egyenesre illeszkedik. A téglalap „átellenes” P csúcsának és az egyenesnek PQ távolsága nem lehet nagyobb, mint a PO átló $\sqrt{a^2 + b^2}$ hossza; és ez éppen a belátandó egyenlőtlenség. Az ábráról azt is leolvashatjuk, hogy egyenlőség

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

esetben áll fenn, ekkor a PO átló merőleges a szóbanforgó egyenesre.

Alkalmazzuk az egyenlőtlenséget az (5) egyenlet jobb oldalára $a = vt$ és $b = \dfrac{D}{2}$ megfeleltetéssel:

(6) $$\frac{g}{2} \cdot t^2 - \frac{D}{2} \leq \sqrt{(vt)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2},$$

megjegyezve, hogy az egyenlőség

(7) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2vt}{D}$$

esetén teljesül. (6) négyzetre emelése és átrendezés után a repülési időre a

$$t \leq \frac{\sqrt{4v^2 + 2gD}}{g}$$

korlátot kapjuk, melynek határeseti értékét (7)-be helyettesítve a keresett szöget is kiszámíthatjuk:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\left(\frac{4v^2}{gD}\right)^2 + \frac{8v^2}{gD}}.$$

Ez egyenértékű az I. megoldás (4) formulájával.

(G. P.)

Megjegyzés. A megoldás teljességéhez az is hozzá tartozik, hogy megvizsgáljuk, vajon a kerékről levált sárdarab nem esik-e vissza a kerékre.

Hartstein Máté megoldása