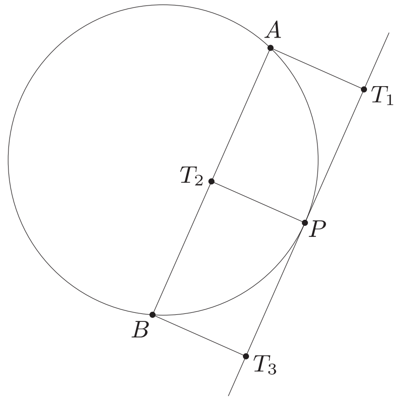
I. megoldás. Jelölje az A-ból, P-ből, illetve B-ből állított merőleges talppontját rendre T_1, T_2 és T_3.

I. eset: Az érintő párhuzamos az AB húrral (*1. ábra*). Ekkor a BT_3T_1A négyszög téglalap, melynek PT_2 középvonala, és $AT_1 = T_2P = BT_3$. Nyilván $T_2P^2 = AT_1 \cdot BT_3$, azaz $T_2P = \sqrt{AT_1 \cdot BT_3}$.



1. ábra

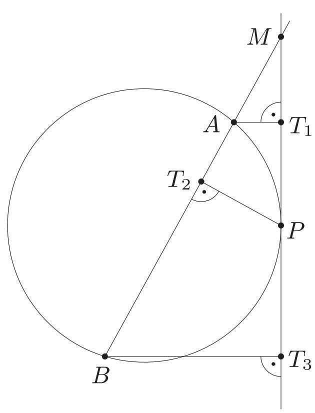
II. eset: Az érintő nem párhuzamos AB-vel (*2. ábra*). Jelölje az AB egyenes és az érintő metszéspontját M. Ekkor $MAT_1\triangle \sim MPT_2\triangle \sim MBT_3\triangle$, hiszen mindhárom derékszögű és az M-nél levő szögük is megegyezik. A hasonlóság miatt:

$$\frac{MA}{AT_1} = \frac{MP}{PT_2} \qquad \text{és} \qquad \frac{MB}{BT_3} = \frac{MP}{PT_2}.$$

A két egyenletet összeszorozva kapjuk, hogy:

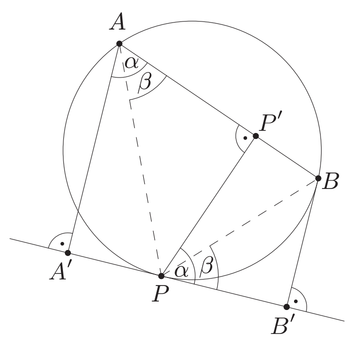
$$\frac{MA \cdot MB}{AT_1 \cdot BT_3} = \frac{MP^2}{PT_2^2}.$$

Tudjuk, hogy $MA \cdot MB = MP^2$, hiszen mindkettő az M pontnak az adott körre vonatkozó hatványa. Ebből pedig $AT_1 \cdot BT_3 = PT_2^2$, majd $\sqrt{AT_1 \cdot BT_3} = PT_2$ következik, és ezt akartuk bizonyítani.



2. ábra

II. megoldás. A *3. ábrán* látható jelölésekkel az az állítás, hogy $PP' = \sqrt{AA' \cdot BB'}$.



3. ábra

$A'AP'\sphericalangle = B'PP'\sphericalangle = \alpha$, mivel merőleges szárú szögek. $PAP'\sphericalangle = B'PB\sphericalangle = \beta$, mivel mindkettő a PB ívhez tartozó kerületi szög.

Több hasonló háromszöget is kaptunk. $AA'P\triangle \sim PP'B\triangle$, mivel mindkettőnek van egy $90°$-os és egy $(\alpha - \beta)$ nagyságú szöge. Felírva a megfelelő oldalak arányát:

$$\frac{AA'}{PP'} = \frac{AP}{PB}\,.$$

$APP'\triangle \sim PBB'\triangle$, mivel mindkettőnek van egy $90°$-os és egy β nagyságú szöge. Felírva a megfelelő oldalak arányát:

$$\frac{PP'}{BB'} = \frac{AP}{PB}\,.$$

A két arányból látható, hogy

$$\frac{PP'}{BB'} = \frac{AA'}{PP'}\,, \quad \text{azaz} \quad (PP')^2 = AA' \cdot BB', \quad PP' = \sqrt{AA' \cdot BB'}.$$