

Megoldás. Legyenek a háromszög szögei α, β, γ , az ABC háromszög szögfelezőinek és a PQR háromszög oldalainak metszéspontjai pedig D_1, D_2, D_3 . A kerületi szögek tétele alapján:

$$\sphericalangle CAP = \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle PQC,$$

mert a PC ívhez tartozó kerületi szögek;

$$\sphericalangle ABQ = \frac{\beta}{2} = \sphericalangle ACQ,$$

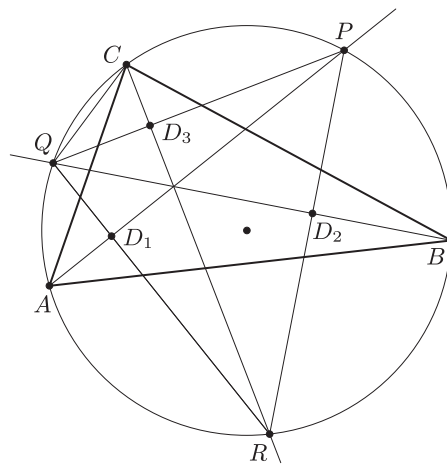
mert az AQ ívhez tartozó kerületi szögek;

$$\sphericalangle ACR = \frac{\gamma}{2}.$$

A CQD_3 háromszögben:

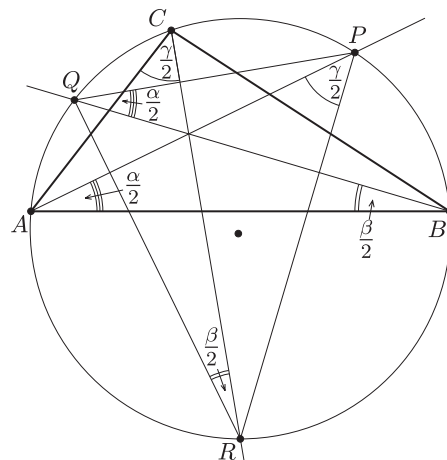
$$\sphericalangle QD_3C = 180^\circ - (\sphericalangle PQC + \sphericalangle ACQ + \sphericalangle ACR) = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 90^\circ.$$

Tehát a CR szögfelező a PQR háromszög R pontból induló magasságvonala.



Hasonlóan, a másik két szögfelező is magasságvonala a PQR háromszögnek. Vagyis az ABC háromszög szögfelezői a PQR háromszög magasságvonalai.

A szerkesztés menete: Megszerkesztjük a PQR háromszög körülírt körét és a háromszög magasságvonalait. A magasságvonalaknak a körrel vett metszéspontjai megadják az ABC háromszög csúcsait.



Diskusszió: A kerületi szögek tételének felhasználásával könnyen belátható, hogy a PQR háromszög szögei:

$$\frac{\beta + \gamma}{2}, \quad \frac{\alpha + \gamma}{2}, \quad \frac{\alpha + \beta}{2},$$

és mindhárom szög kisebb, mint $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 90^\circ$, ami azt jelenti, hogy a PQR háromszög biztosan hegyesszögű.

Tehát a szerkesztés csak akkor végezhető el, ha az adott P, Q, R pontok hegyesszögű háromszöget határoznak meg. Ilyenkor viszont mindig kapunk egy megoldást, mert minden magasságvonal metszi a kört egy, a P, Q, R pontoktól különböző pontban.

Megjegyzés. A diskuszióban használt, a PQR háromszög szögeit leíró észrevétel egyben egy másik szerkesztési eljárást is szolgáltat: a $\frac{\beta + \gamma}{2}, \frac{\alpha + \gamma}{2}, \frac{\alpha + \beta}{2}$ szögek ismeretében egyszerűen megszerkeszthetők az α, β, γ szögek; pl.

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha + \gamma}{2} - \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Ezzel a PQR háromszög köré írt körbe megszerkeszthető egy, az ABC háromszöggel egybevágó $A_1B_1C_1$ háromszög, és az ehhez tartozó $P_1Q_1R_1$ háromszög. Az $A_1B_1C_1$ háromszöget a kör O középpontja körül a P_1OP szöggel elforgatva megkapjuk az ABC -t.