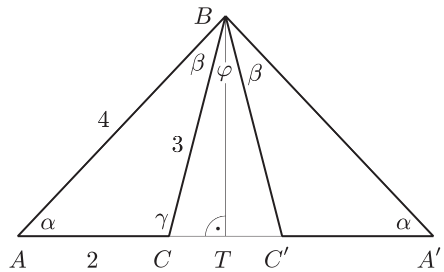
I. megoldás. Jelölje a 2, 3, illetve 4 hosszúságú oldalakkal szemben lévő csúcsokat és szögeket rendre B, A, C, β, α és γ. Mivel $4^2 > 2^2 + 3^2$, a γ tompaszög. A B csúcsból induló magasság T talppontja ezért az AC oldal C-n túli meghosszabbításán van. Tükrözzük a háromszöget a BT egyenesre, A és C képe legyen A', illetve C'. Az A, C, T, C' és A' pontok egy egyenesre esnek. A BAA' háromszögben

$BAA'\sphericalangle = BA'A\sphericalangle = \alpha$. Megmutatjuk, hogy $ABA'\sphericalangle = 3\beta$.



Legyen $CT = x$. Ekkor a BAT és BCT derékszögű háromszögekben Pitagorasz tétele szerint

$$4^2 = BA^2 = AT^2 + BT^2 \quad \text{és} \quad 3^2 = BC^2 = CT^2 + BT^2.$$

A két egyenletet kivonva egymásból kapjuk, hogy

$$16 - 9 = AT^2 - CT^2 = (AT - CT)(AT + CT) = AC \cdot (AC + 2CT) = 2(2 + 2x).$$

Ebből $x = 3/4$, vagyis $CC' = 2x = 3/2$. Legyen $CBC'\sphericalangle = \varphi$. Írjuk fel a koszinusztételt a BAC és BCC' háromszögek AC, illetve CC' oldalaira:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\beta, \qquad \text{azaz} \quad 4 = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos\beta,$$

$$CC'^2 = BC^2 + C'B^2 - 2BC \cdot C'B \cos\varphi, \qquad \text{azaz} \quad \frac{9}{4} = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cos\varphi.$$

Ezekből kapjuk, hogy $\cos\beta = \cos\varphi = 7/8$, s mivel β és φ is 0° és 180° közt vannak, $\beta = \varphi$.

Tehát $ABA'\sphericalangle = 2\beta + \varphi = 3\beta$. Így az ABA' háromszög szögei rendre α, 3β, α. Bármely háromszögben a szögek összege 180°, ezért ebből rögtön adódik a bizonyítandó

$$2\alpha + 3\beta = 180^\circ$$

állítás.

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit. Mivel $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, a bizonyítandó állítás ekvivalens azzal, hogy $180^\circ + \beta = 2\gamma$. A koszinusztételt a háromszög AC, illetve AB oldalaira felírva kapjuk, hogy

$$\cos\beta = \frac{4^2 + 3^2 - 2^2}{2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{7}{8} \quad \text{és} \quad \cos\gamma = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4}.$$

Ezért γ tompaszög, vagyis $180^\circ + \beta$ és 2γ is 180° és 360° közé esik. Ezen az intervallumon a koszinusz függvény szigorúan monoton nő, tehát a bizonyítandó állítás ekvivalens azzal, hogy

$\cos(180^\circ + \beta) = \cos 2\gamma$.

Az addíciós tételeket alkalmazva kapjuk, hogy

$$\cos(180^\circ + \beta) = -\cos\beta = -\frac{7}{8} \quad \text{és} \quad \cos 2\gamma = 2\cos^2\gamma - 1 = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{14}{16},$$

azaz a két kifejezés valóban egyenlő. Ezzel az állítást igazoltuk.