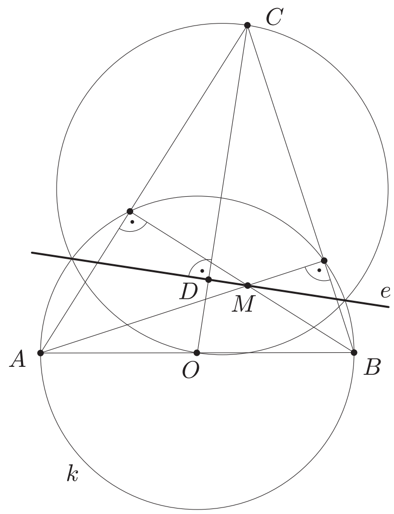
I. megoldás. Jelöljük a körvonalat k-val, középpontját O-val, sugarát pedig r-rel. Ha C egybeesik O-val, akkor sohasem keletkezik háromszög, ezért ekkor a mértani hely üres. Ha C a körvonalra esik, akkor Thalész tétele szerint a keletkezett ABC háromszögek C-nél lévő szöge derékszög, azaz a magasságpontjuk mindig C, tehát ekkor a mértani hely egyedül a C pontból áll.



A továbbiakban tegyük fel, hogy a C pont c távolságra helyezkedik el O-tól, ahol $0 < c \neq r$. Legyen D az OC félegyenesnek az a pontja, amely O-tól $d = r^2/c$ távolságra van[1]. Megmutatjuk, hogy a keresett mértani hely az az e egyenes, amely merőleges az OC egyenesre és áthalad D-n.

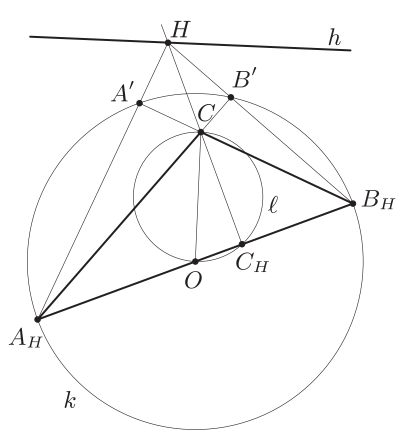
Indítsunk O-ból helyvektorokat és jelöljük ezeket a megfelelő kisbetűvel, azaz tetszőleges P pont esetén legyen $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$. Ha az ABC háromszög magasságpontja M, akkor M-et a háromszög csúcsaival összekötő egyenesek merőlegesek a háromszög szemközti oldalaira. Tehát $\mathbf{m} - \mathbf{a}$ merőleges a $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ vektorra, $\mathbf{m} - \mathbf{b}$ pedig merőleges a $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ vektorra. Mivel $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$, a vektorok skaláris szorzatát használva ezt az

$$(\mathbf{m} - \mathbf{a})(\mathbf{c} + \mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad \text{és} \quad (\mathbf{m} + \mathbf{a})(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

összefüggésekkel fejezhetjük ki. Ezeket összeadva kapjuk, hogy $2\mathbf{mc} - \mathbf{2a^2} = \mathbf{0}$, vagyis $\mathbf{mc} = \mathbf{a^2}$. A D definíciójából viszont az következik, hogy $\mathbf{dc} = \mathbf{a^2}$, ezért $\mathbf{mc} = \mathbf{dc}$, s így $(\mathbf{m} - \mathbf{d})\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Az $\mathbf{m} - \mathbf{d}$ vektor tehát merőleges a $\mathbf{c}$ vektorra, vagyis MD merőleges OC-re. Ezért az M pont rajta van az e egyenesen.

Megmutatjuk, hogy az e egyenes minden pontja előáll valamely megfelelő háromszög magasságpontjaként. Legyen E az e egyenes tetszőleges pontja. A k-nak pontosan egy EC-re merőleges $A_E B_E$ átmérője létezik. Mivel EC nem párhuzamos e-vel, az A_E és B_E nem eshet az OC egyenesre, tehát A_E, B_E, és C mindig háromszöget alkot. Ennek a háromszögnek a magasságpontja az előzőekben bizonyítottak szerint illeszkedik e-re, s mivel EC merőleges $A_E B_E$-re, azért EC-re is. Azaz a magasságpont nem lehet más, mint az EC egyenes e-vel alkotott E metszéspontja.

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit. Ha $C \equiv O$ vagy $C \in k$, akkor ugyanazt mondhatjuk, mint az I. megoldásban. Ha ezek egyike sem teljesül, akkor legyen az OC szakasz Thalész-köre ℓ, a k és ℓ hatványvonala[2] h, az ABC háromszög magasságainak talppontjai pedig rendre A', B' és C'. Megmutatjuk, hogy a keresett mértani hely a h egyenes.



[1] Ez éppen C-nek a k-ra vonatkozó inverze.

[2] A hatványvonalról bővebben lásd: `http://www.lexikon.fazekas.hu/`.

Az ABC háromszög f Feuerbach-köre átmegy az A', B', C' pontokon, valamint az MA, MB, MC szakaszok felezőpontjain. Ezért M-nek f-re vonatkozó hatványát szelőszakaszok szorzataként felírva kapjuk, hogy

$$A'M \cdot \frac{MA}{2} = B'M \cdot \frac{MB}{2} = C'M \cdot \frac{MC}{2},$$

azaz

$$A'M \cdot MA = B'M \cdot MB = C'M \cdot MC.$$

Viszont $AA'B\sphericalangle = BB'A\sphericalangle = OC'C\sphericalangle = 90°$, ezért Thalész tételének megfordítása miatt A' és B' rajta vannak k-n, C' pedig rajta van ℓ-en. Tehát $A'M \cdot MA = B'M \cdot MB$ éppen M-nek k-ra vonatkozó hatványa, míg $C'M \cdot MC$ az M-nek ℓ-re vonatkozó hatványa. Vagyis M-nek a két körre vonatkozó hatványa egyenlő, ezért M illeszkedik a körök h hatványvonalára.

Be kell még látnunk, hogy h minden pontja a mértani helyhez tartozik. Tetszőleges h-ra illeszkedő H pont esetén legyen HC és ℓ C-től különböző metszéspontja C_H (ez mindig létezik, mert ℓ-nek a C-beli érintője párhuzamos h-val), k-nak a CC_H egyenesre merőleges átmérője pedig A_HB_H. Mivel CC_H nem párhuzamos h-val, azért A_H, B_H, és C mindig háromszöget alkot. Ennek a háromszögnek a magasságpontja az előzőekben bizonyítottak szerint illeszkedik h-ra, s mivel CC_H merőleges A_HB_H-ra, így CC_H-ra is. Azaz a magasságpont nem lehet más, mint a CC_H egyenes h-val alkotott H metszéspontja.