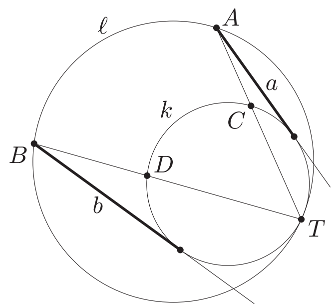
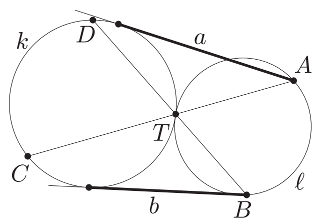
Megoldás. Ha AT a T-ben érinti k-t, akkor $AT = a$, amiből a feltétel szerint $BT = b$ következik. Ez viszont azt jelenti, hogy BT is T-ben érinti k-t, azaz A is és B is rajta van k T-beli érintőegyenesén. A feltételek szerint viszont A, B és T nem kollineárisak, tehát az AT egyenes nem lehet a T-beli érintő. Ugyanígy kapjuk, hogy BT sem lehet a T-beli érintő. Ezért az AT és BT egyenesek még egy-egy, T-től is és egymástól is különböző C, illetve D pontban metszik k-t (lásd az *ábrákat*).



1. ábra



2. ábra

Ekkor a pont körre vonatkozó hatványáról szóló tétel (lásd pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye I.,* 1323. feladat) szerint $AT \cdot AC = a^2$ és $BT \cdot BD = b^2$. Ezeket elosztva egymással kapjuk, hogy

$$\frac{AT \cdot AC}{BT \cdot BD} = \frac{a^2}{b^2},$$

a feladat feltételeiből pedig

$$\frac{AT}{BT} = \frac{a}{b}, \quad \text{azaz} \quad \frac{AT^2}{BT^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

következik, ezért

$$\frac{AT \cdot AC}{BT \cdot BD} = \frac{AT^2}{BT^2}, \quad \text{tehát} \quad \frac{AC}{AT} = \frac{BD}{BT}.$$

Legyen $\dfrac{AC}{AT} = \dfrac{BD}{BT} = \lambda$. Ekkor $\lambda \neq 1$. Ha $\lambda < 1$, akkor C az AT, D pedig a BT szakasz belső pontja, tehát

$$TC = AT - AC = (1-\lambda)AT \quad \text{és} \quad TD = BT - BD = (1-\lambda)BT$$

(*1. ábra*). Ha $\lambda > 1$, akkor T az AC és a BD szakasznak is belső pontja, ezért $TC = AC - AT = (\lambda - 1)AT$ és $TD = BD - BT = (\lambda - 1)BT$ (*2. ábra*).

Vagyis mindkét esetben igaz, hogy $\dfrac{TC}{TA} = \dfrac{TD}{TB}$, és az első esetben C és D a TA, illetve TB szakaszok belső pontjai, a másodikban pedig T a CA, illetve DB szakasznak is belső pontja. Ezért az a középpontos hasonlóság, melynek centruma T, aránya pedig az első esetben $\dfrac{TC}{TA} = 1 - \lambda$, a másodikban pedig $-\dfrac{TC}{TA} = -(\lambda - 1) = 1 - \lambda$, az A-t C-be, B-t pedig D-be viszi. Középpontos hasonlóságnál kör képe kör, ezért az A, B és T pontokra illeszkedő ℓ kör képe a hasonlóságoknál mindkét esetben k lesz.

Viszont tetszőleges, az identitástól különböző középpontos hasonlóság esetén igaz, hogy a hasonlóság centrumán átmenő kör és annak képe egymást a centrumban érinti, mert nyilvánvalóan a centrum az egyetlen közös pontjuk. Ezért ℓ a T-ben érinti k-t, ami épp a bizonyítandó állítás.