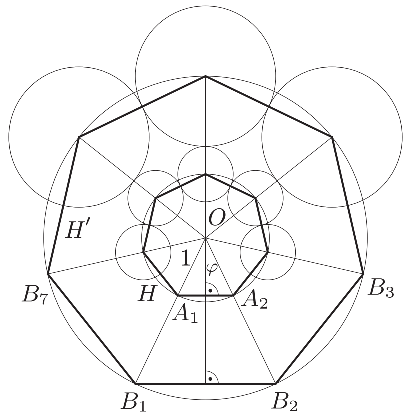
Megoldás. Az első kérdésre a válasz nem. Ezt legegyszerűbben indirekt úton bizonyíthatjuk be. Tegyük fel, hogy 13 kört elhelyeztünk a megfelelő módon. Készítsük el azt a 13 csúcsú gráfot, melynek csúcsai az egyes köröknek felelnek meg, két csúcs között pedig pontosan akkor megy él, ha a megfelelő körök érintik egymást. Ebben a gráfban feltevésünk szerint a fokszámok összege $13 \cdot 3 = 39$, ami megegyezik az élek számának kétszeresével, azaz egy páros számmal. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy 13 kör nem helyezhető el a feltételeknek megfelelően.



1. ábra

A második kérdésre viszont igen a válasz. Ennek bizonyításához elegendő egy példát mutatnunk. Írjunk az O középpontú 1 sugarú körbe egy $H = A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ szabályos hétszöget. Legyen $\varphi = \dfrac{\pi}{7}$. Ekkor H oldalainak hossza $2\sin\varphi$, ezért a H csúcsai köré írt $r = \sin\varphi$ sugarú körök közül a szomszédos csúcsok köré írtak H oldalfelezőpontjaiban érintik egymást. Ezután O-ból középpontosan nagyítsuk H-t és a köröket $\dfrac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}$ arányban. Így kapjuk a $H' = B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ hétszöget és másik hét olyan kört, mely a vele egyenlő sugarúak közül pontosan két másikat érint (az érintési pontok a H' hétszög oldalfelezőpontjai).

Megmutatjuk, hogy az A_i középpontú kör a B_i középpontú kört is érinti ($i = 1, 2, \ldots, 7$). A hétszög szabályossága miatt ezt nyilván elegendő $i = 1$ esetén belátnunk. A középpontos nagyítás miatt $OB_1 = \dfrac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}$, a B_1 középpontú kör sugara pedig

$$r' = \frac{r(1+\sin\varphi)}{1-\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi(1+\sin\varphi)}{1-\sin\varphi} = \frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi} - r.$$

Így

$$A_1B_1 = OB_1 - OA_1 = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} - 1 = \frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = r' + r.$$

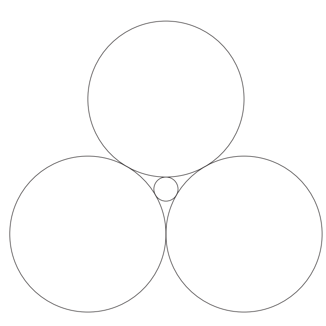
Tehát a két kör középpontjának távolsága megegyezik sugaraik összegével, amiből következik, hogy a körök érintik egymást.

Ezért a H és H' hétszögek csúcsai köré írt 14 kör közül mindegyik pontosan három másikat érint.

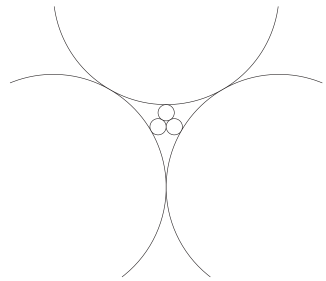
Megjegyzés. A megoldás első felét 13 helyett tetszőleges páratlan számra elmondhatjuk, azaz *páratlan számú kör nem helyezhető el a síkon úgy, hogy közülük mindegyik pontosan három másikat érintsen.*

Megmutatjuk, hogy *ha $n \geq 4$, páros szám, akkor viszont elhelyezhető a síkon n darab kör úgy, hogy közülük mindegyik pontosan három másikat érintsen.*

Valamely 1 oldalú szabályos háromszög csúcsai köré rajzoljunk 1/2 sugarú köröket. Így három olyan kört kapunk, melyek páronként érintik egymást. A háromszög O középpontja köré alkalmas $\left(1/\sqrt{3}-1/2\right)$ sugarú kört rajzolva négy olyan körhöz jutunk, melyek közül mindegyik érinti a három másikat (*2. ábra*). Ha ehelyett a három kört O-ból alkalmas arányban $\left(\dfrac{1/\sqrt{3}-1/2}{1/\sqrt{3}+1/2}\right)$ lekicsinyítjük, akkor hat körhöz jutunk, melyek közül mindegyik pontosan három másikat érint (*3. ábra*). Tehát $n = 4$ és $n = 6$ esetén létezik megfelelő körrendszer. Ha $n > 6$ páros, akkor vagy $n = 4k + 4$, vagy pedig $n = 4k + 6$, ahol $k \geq 1$. Ezért k darab négy körből álló és egy darab négy vagy hat körből álló konfigurációt egymás mellé helyezve n darab megfelelő kört kapunk.



2. ábra



3. ábra