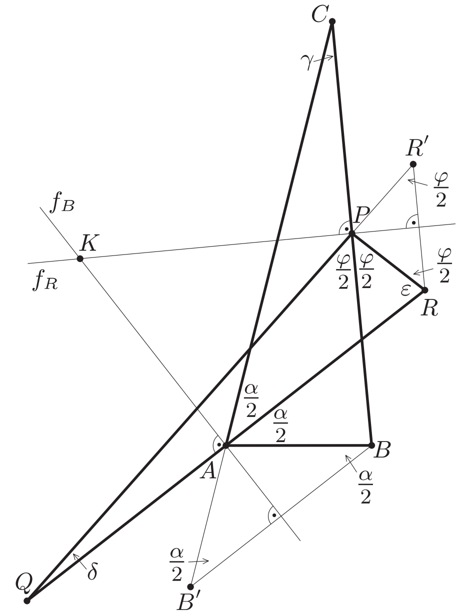
I. megoldás. Jelölje az ABC és a PQR háromszögek szögeit az *1. ábrán* látható módon α, β, γ, illetve φ, δ, ε. Mérjük fel az AC oldal A-n túli meghosszabbítására az AB, a PQ oldal P-n túli meghosszabbítására a PR szakaszt. Az így kapott pontok legyenek B', illetve R'. Így a bizonyítandó állítás $B'C = R'Q$.

Az $AB'B$ egyenlőszárú háromszög A-nál lévő külső szöge α, ezért

$$AB'B\sphericalangle = ABB'\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}.$$

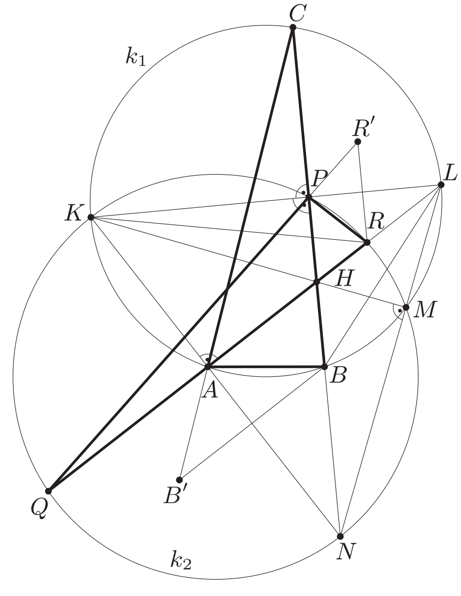
Mivel QR felezi a BAC szöget, $BAR\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} = ABB'\sphericalangle$, vagyis BB' és RQ párhuzamosak. Ugyanígy kapjuk a $PR'R$ háromszög egyenlőszárúságából kiindulva, hogy RR' és BC is párhuzamosak (*1. ábra*).



1. ábra

A BB' szakasz felezőmerőlegese, f_B átmegy A-n, ami QR felezőpontja, tehát f_B egyúttal QR-nek is szakaszfelező merőlegese. Ugyanígy kapjuk, hogy az RR' szakasz felezőmerőlegese, f_R átmegy P-n, ami BC felezőpontja, tehát f_R egyúttal BC-nek is szakaszfelező merőlegese. Ezért a $K = f_B \cap f_R$ pont a $B'BC$ és az $R'RQ$ háromszögek körülírt köreinek is középpontja.

A $B'BC$ háromszög köré írt körben a BC húrhoz $\frac{\alpha}{2}$ kerületi szög tartozik, ezért a megfelelő középponti szög $BKC\sphericalangle = \alpha$. Viszont $BAC\sphericalangle = \alpha$, tehát a BC szakasz K-ból és A-ból ugyanakkora szögben látszik, ezért $BCKA$ húrnégyszög. Legyen a köré írható köre k_1. Hasonlóan kapjuk, hogy $RQKP$ is húrnégyszög, az e köré írható kör legyen k_2 (*2. ábra*).



2. ábra

Legyen k_1 és k_2 második metszéspontja M, KP és k_1, illetve KA és k_2 második metszéspontja L, illetve N. Mivel KP merőlegesen felezi k_1-ben a BC húrt, KL átmérő k_1-ben. Ugyanígy kapjuk, hogy KN átmérő k_2-ben. Ezért Thalész tétele szerint

$$LMK\sphericalangle = NMK\sphericalangle = 90^\circ,$$

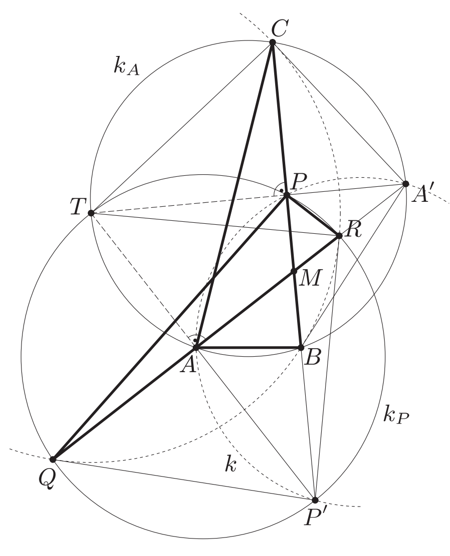
vagyis L, M és N egy egyenesen vannak. Ugyancsak Thalész tétele miatt $KAL\sphericalangle = 90^\circ$, s mivel KA az RQ szakaszfelező merőlegese, A, R és L is egy egyenesen vannak. Ugyanígy látható be, hogy P, B és N is kollineárisak. Ez viszont azt jelenti, hogy a KLN háromszög magasságvonalai éppen KM, LA és NP, azaz e három egyenes a KLN háromszög H magasságpontjában metszi egymást. Ekkor a szelőszakaszok szorzatára vonatkozó tételt (lásd pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye I,* 1325. és 1327. feladatok) H-ra és a k_1, illetve k_2 körre alkalmazva kapjuk, hogy

$$BH\cdot HC = KH\cdot HM,\quad \text{és}\quad RH\cdot HQ = KH\cdot HM,\quad \text{azaz}\quad BH\cdot HC = RH\cdot HQ,$$

vagyis B, C, R és Q egy k körön vannak. Viszont már láttuk, hogy BC és RQ felezőmerőlegese is átmegy K-n, ezért a négy ponton átmenő kör középpontja K, amiből az következik, hogy k egyúttal a $B'BC$ és $R'RQ$ háromszögek közös körülírható köre.

Most már csak azt kell megmutatnunk, hogy k-ban a $B'C$ és $R'Q$ húrokhoz ugyanakkora kerületi szög tartozik. Ez a szög (lásd az *1. ábrát*) k_1-ben $B'BC\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}+\beta$, míg k_2-ben $R'RQ\sphericalangle = \dfrac{\varphi}{2}+\varepsilon$. Ezek viszont egyenlőek, mert mindkettő megegyezik $(180^\circ - AKP\sphericalangle)$-gel, hiszen AK merőleges $B'B$-re is és RQ-ra is, PK pedig merőleges BC-re is és $R'R$-re is. Ezért $B'C = R'Q$, s így az állítást beláttuk.

II. megoldás. Az ABC háromszög köré írható kört jelölje k_A, a PQR háromszög köré írhatót pedig k_P. A BC egyenesnek a k_P körrel alkotott második metszéspontja legyen P', a QR egyenesnek k_A-val alkotott második metszéspontja pedig A'. Mivel $QPP'\sphericalangle = RPP'\sphericalangle$, kapjuk, hogy $QP' = RP'$, vagyis AP' a QR szakasz felezőmerőlegese. Hasonlóképpen $BA' = CA'$, és PA' a BC szakasz felezőmerőlegese.



3. ábra

Legyen $AP'P\sphericalangle = \varepsilon$ és $P'AB\sphericalangle = \eta$. Mivel $CAA'\sphericalangle = BAA'\sphericalangle = 90^\circ - \eta$, azért

$$CAP'\sphericalangle = 180^\circ - \eta,$$

és így

$$BA'A\sphericalangle = BCA\sphericalangle = \eta - \varepsilon.$$

Továbbá $CA'A\sphericalangle = CBA\sphericalangle = \varepsilon + \eta$, ahonnan $CA'P\sphericalangle = BA'P\sphericalangle = \eta$, és $PA'A\sphericalangle = \varepsilon$ következik. Ezért az A', P, A, P' pontok egy k körvonalra illeszkednek, továbbá ha az $A'P$ és $P'A$ egyenesek metszéspontját T-vel jelöljük, akkor

$$A'TA\sphericalangle = 90^\circ - \varepsilon = BAA'\sphericalangle + BCA\sphericalangle = BCA'\sphericalangle + BCA\sphericalangle = A'CA\sphericalangle.$$

A T pont tehát illeszkedik a k_A körre, és ugyanígy a k_P körre is, méghozzá TA' a k_A körnek, míg TP' a k_P körnek átmérője is egyben (*3. ábra*).

Felhasználva, hogy $P'R = P'Q$ és hogy A felezi a QR szakaszt, valamint Ptolemaiosz tételét (lásd pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye I,* 1259. feladat) a $PQP'R$ húrnégyszögben, kapjuk hogy

$$(PQ+PR)\cdot P'R = PQ\cdot P'R + PR\cdot QP' = QR\cdot PP' = 2AR\cdot TP'\cos\varepsilon.$$

Mivel a $P'AR$ és $P'RT$ derékszögű háromszögek P'-nél lévő szöge közös, ezért a háromszögek hasonlók, tehát

$$PQ + PR = 2 \cdot \frac{AR}{RP'} \cdot TP' \cdot \cos\varepsilon = 2 \cdot \frac{RT}{TP'} \cdot TP' \cdot \cos\varepsilon = 2 \cdot TR \cdot \cos\varepsilon,$$

és ugyanígy kapjuk az $A'PC$ és $A'CT$ háromszögek hasonlóságából, hogy

$$AB + AC = 2 \cdot TC \cdot \cos\varepsilon.$$

A bizonyítandó állításhoz elegendő tehát a $TR = TC$ egyenlőséget igazolni.

Legyen BC és RQ metszéspontja M. Alkalmazzuk a szelőszakaszok szorzatára vonatkozó tételt az M pontra és rendre a k_A, k és k_P körökre:

$$MB \cdot MC = MA \cdot MA' = MP \cdot MP' = MQ \cdot MR.$$

Tehát a B, Q, C és R pontok egy körre esnek. $TB = TC$ és $TQ = TR$ miatt ennek a körnek éppen T a középpontja, vagyis valóban $TR = TC$. Ezzel az állítást beláttuk.