I. megoldás. Ha $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$, akkor a kifejezés értéke

$$\sin 60^\circ \sin 60^\circ \cos 60^\circ + \sin^2 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{9}{8}.$$

Megmutatjuk, hogy minden más esetben a kifejezés értéke ennél kisebb. Mivel $\alpha+\beta=180^\circ-\gamma$, azért $\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma$, az addíciós tételekből pedig következik, hogy

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

A kifejezést a fenti összefüggések felhasználásával átalakítva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
K&=\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin^2\gamma=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)\cdot\cos\gamma+1-\cos^2\gamma=\\
&=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma\big)\cdot\cos\gamma+1-\cos^2\gamma=\\
&=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma+1-\frac{1}{2}\cos^2\gamma=\\
&=1-\frac{1}{2}\big(\cos^2\gamma-\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma\big)=\\
&=1-\frac{1}{2}\left[\left(\cos\gamma-\frac{\cos(\alpha-\beta)}{2}\right)^2-\frac{\cos^2(\alpha-\beta)}{4}\right]=\\
&=1+\frac{1}{8}\cos^2(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\left(\cos\gamma-\frac{\cos(\alpha-\beta)}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Mivel bármely valós szám négyzete nemnegatív, valamint minden x valós szám esetén $\cos^2 x\le 1$, azért

$$K\le 1+\frac{1}{8}\cos^2(\alpha-\beta)\le\frac{9}{8}.$$

Az is látszik, hogy egyenlőség pontosan akkor van, ha $\alpha=\beta$ és $\cos\gamma=\dfrac{\cos 0^\circ}{2}=\dfrac{1}{2}$, azaz ha a háromszög szabályos. Ezzel az állítást beláttuk.

II. megoldás. Az első megoldáshoz hasonlóan most is az $\alpha+\beta=180^\circ-\gamma$ összefüggésből indulunk ki. Ebből következik, hogy

$$\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)\quad\text{és}\quad\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta),$$

vagyis az az addíciós képletek felhasználva:

$$\begin{aligned}
K&=\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin^2\gamma=\\
&=-\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2=\\
&=\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta.
\end{aligned}$$

Mivel bármely x szögre teljesül, hogy $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, azért

$$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=1,$$

s így

$$\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta=1-\cos^2\alpha\cos^2\beta,$$

vagyis

$$\begin{aligned}
K&=1-\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta=\\
&=1+\cos\alpha\cos\beta(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta)=1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.
\end{aligned}$$

Egy háromszögben a szögek koszinuszainak szorzata pontosan akkor pozitív, ha a háromszög hegyesszögű. Ezért ha K maximumát keressük, akkor feltehetjük, hogy a háromszög hegyesszögű. Mivel a $\cos x$ függvény a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon pozitív és alulról konkáv, a számtani és mértani közepek között fennálló egyenlőtlenség, valamint a Jensen-egyenlőtlenség szerint

$$K \leq 1 + \left(\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}\right)^3 \leq 1 + \cos\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right)^3 = 1 + \cos^3 60^\circ = \frac{9}{8}\,.$$

Tehát K legnagyobb értéke $\frac{9}{8}$, s ezt pontosan akkor veszi fel, ha a háromszög szabályos.