Megoldás. „Bontsuk fel” az abszolút érték jelet:

I. eset: $x \geq -\frac{1}{4}$; az egyenletünk ekkor $x^2 - 2x + c - \frac{1}{2} = 0$, a megoldások lehetséges értékei:

$$x_1 = 1 + \sqrt{\frac{3}{2} - c} \quad \text{és} \quad x_2 = 1 - \sqrt{\frac{3}{2} - c}\,.$$

I/A: Akkor van két különböző valós gyök, ha $c < \frac{3}{2}$, és $1 - \sqrt{\frac{3}{2} - c} \geq -\frac{1}{4}$, azaz $\frac{5}{4} \geq \sqrt{\frac{3}{2} - c}$, $\frac{25}{16} \geq \frac{3}{2} - c$, tehát:

$$\frac{3}{2} > c \geq -\frac{1}{16}\,.$$

I/B: Egy valós gyök van pontosan akkor, ha $c = \frac{3}{2}$ (amikor $x_1 = 1 \geq -\frac{1}{4}$) vagy

$$c < \frac{3}{2} \quad \text{és} \quad 1 - \sqrt{\frac{3}{2} - c} < -\frac{1}{4}, \quad \text{vagyis} \quad -\frac{1}{16} > c.$$

I/C: Pontosan akkor nincs valós gyök, ha $c > \frac{3}{2}$.

II. eset: $x < -\frac{1}{4}$; egyenletünk ilyenkor az $x^2 + 2x + c + \frac{1}{2} = 0$ alakot ölti, a gyökök szóba jövő értékei:

$$x_3 = -1 + \sqrt{\frac{1}{2} - c} \quad \text{és} \quad x_4 = -1 - \sqrt{\frac{1}{2} - c}\,.$$

II/A: Két valós gyök akkor van, ha $c < \frac{1}{2}$, és $-1 + \sqrt{\frac{1}{2} - c} < -\frac{1}{4}$, azaz

$$\sqrt{\frac{1}{2} - c} < \frac{3}{4}\,, \quad \frac{1}{2} - c < \frac{9}{16}\,, \quad c > -\frac{1}{16};$$

tehát $-\frac{1}{16} < c < \frac{1}{2}$.

II/B: Egyetlen valós megoldás van, ha $c = \frac{1}{2}$ (ekkor $x_3 = -1 < -\frac{1}{4}$) vagy $c < \frac{1}{2}$, és $-1 + \sqrt{\frac{1}{2} - c} \geq -\frac{1}{4}$, azaz

$$c = \frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad c \leq -\frac{1}{16}.$$

II/C: Pontosan akkor nincs valós gyök, ha $c > \frac{1}{2}$.

Ahhoz, hogy az egyenletnek pontosan 3 különböző valós gyöke legyen, a következő esetek vezethetnek:
(i) teljesül I/A és II/A, és a 2-2 gyök közül 1-1 megegyezik egymással;
(ii) I/A és II/B teljesül, és utóbbi megoldása az I/A-beli eset mindkét gyökétől különbözik;
(iii) I/B és II/A teljesül, és a kétféle gyökök között nincs egyezés.

Az (i) esetben $\frac{3}{2} > c \geq -\frac{1}{16}$ és $\frac{1}{2} > c > -\frac{1}{16}$ szerint $-\frac{1}{16} < c < \frac{1}{2}$. Mivel

$$1 + \sqrt{\frac{3}{2} - c} > -1 + \sqrt{\frac{1}{2} - c} > -1 - \sqrt{\frac{1}{2} - c}\,,$$

csak

$$1 - \sqrt{\frac{3}{2} - c} = -1 + \sqrt{\frac{1}{2} - c} \quad \text{vagy} \quad 1 - \sqrt{\frac{3}{2} - c} = -1 - \sqrt{\frac{1}{2} - c}$$

eset lehetséges. Rendezve és mindkét oldalt négyzetre emelve mindkét esetnél ugyanaz az eredmény adódik:

$$2 - \sqrt{\frac{3}{2} - c} = +\sqrt{\frac{1}{2} - c}\,, \quad \text{illetve} \quad 2 - \sqrt{\frac{3}{2} - c} = -\sqrt{\frac{1}{2} - c}\,,$$

$$4 + \frac{3}{2} - c - \sqrt{24 - 16c} = \frac{1}{2} - c,$$

$$5 = \sqrt{24 - 16c}\,, \quad 25 = 24 - 16c, \quad c = -\frac{1}{16}\,,$$

ami ebben az esetben lehetetlen.

Az (ii) esetben $\frac{3}{2} > c \geq -\frac{1}{16}$, és $c = \frac{1}{2}$ vagy $c \leq -\frac{1}{16}$, tehát $c = \frac{1}{2}$ vagy $c = -\frac{1}{16}$. Ha $c = \frac{1}{2}$, akkor a gyökök: 2, 0 és -1; $c = -\frac{1}{16}$ esetén pedig $\frac{9}{4}$, $-\frac{1}{4}$ és $-\frac{7}{4}$; mindkét eset megfelelő.

A (iii) esetben $c = \frac{3}{2}$ vagy $c < -\frac{1}{16}$, és $-\frac{1}{16} < c < \frac{1}{2}$, ez az eset nem következhet be.

Tehát pontosan akkor van 3 különböző valós gyök, ha $c = \frac{1}{2}$ vagy $-\frac{1}{16}$.