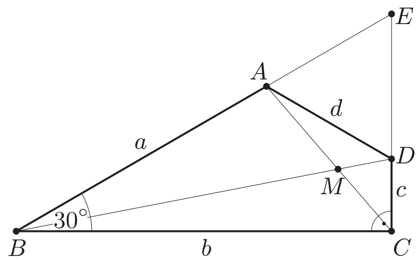
I. megoldás. Jelölje az átlók metszéspontját M, az a és a c oldal meghosszabbításának metszéspontját pedig E (*1. ábra*). Ekkor

$$CEB\sphericalangle = 180^\circ - (EBC\sphericalangle + BCE\sphericalangle) = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ.$$

Vagyis az EBC háromszög egy olyan szabályos háromszög fele, amelynek b a magassága. Így

$$EB = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6\sqrt{3}\,, \quad \text{ahonnan} \quad EA = EB - a = 2\sqrt{3}\,.$$

Mivel CE az EB fele, a hossza $3\sqrt{3}$. Ezekből $DE = CE - c = 2\sqrt{3}$.



1. ábra

Az ADE háromszög két oldala egyenlő, és az általuk bezárt szög 60°, ezért szabályos. Tehát $d = 2\sqrt{3}$, $EAD\sphericalangle = ADE\sphericalangle = 60^\circ$, amiből $DAB\sphericalangle = CDA\sphericalangle = 120^\circ$.

Az ABD háromszögben: $ABD\sphericalangle + BDA\sphericalangle = 180^\circ - DAB\sphericalangle = 60^\circ$. Az ABD és a DAC háromszögek hasonlóak, mert

$$\frac{AB}{DA} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{DA}{CD}$$

és az ezen két oldal által közbezárt szög $DAB\sphericalangle = CDA\sphericalangle = 120^\circ$. Emiatt $ABD\sphericalangle = DAC\sphericalangle$ is teljesül.

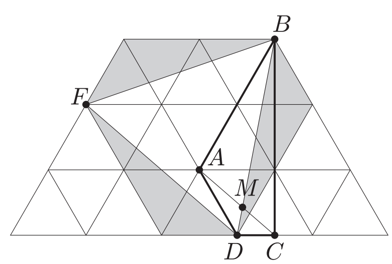
Mindezekből:

$$AMD\sphericalangle = 180^\circ - (DAM\sphericalangle + MDA\sphericalangle) = 180^\circ - (DAC\sphericalangle + BDA\sphericalangle) =$$
$$= 180^\circ - (ABD\sphericalangle + BDA\sphericalangle) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Tehát a négyszög átlói $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$-ot zárnak be egymással.

II. megoldás. Az előző megoldásból felhasználjuk, hogy az $ABCD$ négyszög negyedik oldalának hossza $2\sqrt{3}$, és a fennmaradó két szög nagysága pedig 120°.

Helyezzük el ezt a négyszöget egy „szabályos háromszög-rácsban”, ahol a szabályos háromszögek oldalának hossza $2\sqrt{3}$ (*2. ábra*). Könnyen látható, hogy a magasságuk 3.



2. ábra

Az *ábrán* rajzoljuk be az átlókat, majd a rövidebbik átlót toljuk el $\sqrt{3}$-mal az ábrán látható módon, majd hosszabbítsuk meg, így kapjuk az F pontot. A DBF háromszög szabályos, mert mindhárom oldala egy olyan háromszög leghosszabb oldala, amelynek két rövidebb oldala $2\sqrt{3}$ és $4\sqrt{3}$, és az általuk bezárt szög 120°-os. Ezért $BDF\sphericalangle = 60^\circ$. Az átlók metszéspontját M-mel jelölve $BMA\sphericalangle$ és $BDF\sphericalangle$ egyállású szögek, ezért $BMA\sphericalangle = 60^\circ$, a négyszög átlói által bezárt szög tehát 60°.

III. megoldás. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit. Legyen továbbá $BMA\sphericalangle = \varphi$. Az I. megoldás szerint $BE = 6\sqrt{3}$, $CE = 3\sqrt{3}$ és az ADE háromszög egy $2\sqrt{3}$ oldalú szabályos háromszög, így magassága 3.

Számítsuk ki kétféleképpen a négyszög területét.

$$T = T_{BCE} - T_{ADE} = \frac{3\sqrt{3}\cdot 9}{2} - \frac{2\sqrt{3}\cdot 3}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{2}\,. \tag{1}$$

Másrészt

$$T = \frac{BD \cdot AC}{2} \cdot \sin\varphi. \tag{2}$$

Szükségünk van tehát BD és AC hosszára.

A Pitagorasz-tételből: $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$. Az A-ból a BC oldalra állított merőleges talppontját F-fel jelölve látható, hogy a $BFA\triangle$ is egy szabályos háromszög fele, amiből $BF = 6$ és

$AF = 2\sqrt{3}$, továbbá $FC = BC - BF = 3$ következik. Az AFC háromszögre alkalmazott Pitagorasz-tételből kapjuk ezután, hogy

$$AC = \sqrt{AF^2 + FC^2} = \sqrt{21}\,.$$

Az átlókra kapott értékeket (2)-be helyettesítve:

$$T = \frac{2\sqrt{21} \cdot \sqrt{21}}{2} \cdot \sin\varphi = 21 \sin\varphi. \tag{3}$$

Végül (1) és (3) jobb oldalát egyenlővé téve, majd a kapott egyenlet mindkét oldalát 21-gyel osztva kapjuk, hogy $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, amiből $\varphi = 60°$ vagy $120°$, az átlók által bezárt szög tehát $60°$.

IV. megoldás. Tekintsük az *1. ábrát.*

Legyen $BMA\sphericalangle = \alpha$, $CBM\sphericalangle = \beta$ és $BCM\sphericalangle = \gamma$. Mivel $BMA\sphericalangle$ a BCM háromszög külső szöge, azért $\alpha = \beta + \gamma$. Az ABC háromszögben felírva a koszinusz-tételt:

$$AC^2 = 48 + 81 - 2 \cdot 36 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30° = 21,$$

amiből $AC = \sqrt{21}$. A BCD háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt: $9^2 + 3 = BD^2$, amiből $BD = \sqrt{84}$.

Számoljuk ki β és γ szinuszát és koszinuszát:

$$\sin\beta = \frac{CD}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{84}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}\,, \quad \cos\beta = \frac{BC}{BD} = \frac{9}{\sqrt{84}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\,.$$

Az ABC háromszögre vonatkozó szinusztételből adódóan:

$$\frac{\sin\gamma}{4\sqrt{3}} = \frac{\sin 30°}{\sqrt{21}}\,,$$

amiből $\sin\gamma = \frac{2}{\sqrt{7}}$. Ebből (mivel $\gamma < 90°$) kapjuk, hogy

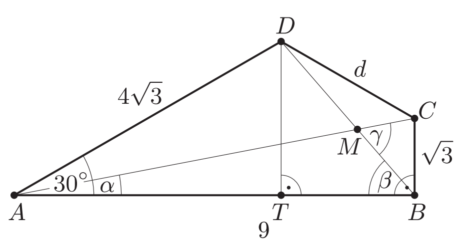
$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\,.$$

Végül az addíciós-tételt felhasználva:

$$\cos\alpha = \cos(\beta + \gamma) = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} - \frac{1}{2\sqrt{7}} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{1}{2}\,,$$

és így $\alpha = 60°$.

V. megoldás. Használjuk a *3. ábra* jelöléseit.



3. ábra

Mivel γ az ABM háromszög külső szöge, azért $\gamma = \alpha + \beta$. Meghatározásához használjuk fel a

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

összefüggést.

Az ABC háromszögben $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

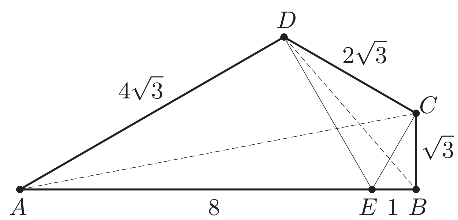
Az ATD háromszög egy szabályos háromszög fele, így $TD = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ és $AT = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 6$. Így $TB = 9 - 6 = 3$, és a TBD háromszögben $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Így tehát

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{7\sqrt{3}}{9}}{\frac{21}{27}} = \sqrt{3}, \quad \text{amiből} \quad \alpha = 60^\circ.$$

VI. megoldás. Állítsunk D-ben merőlegest AD-re, és ennek az AB oldallal vett metszéspontja legyen E. Az ADE háromszögben $DAE\sphericalangle = 30^\circ$ és $ADE\sphericalangle = 90^\circ$, ezért a háromszög harmadik szöge,

$AED\sphericalangle = 60^\circ$, és AD ismeretében DE és AE is meghatározható: $AE = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 8$, illetve $DE = AE/2 = 4$.



4. ábra

Ezután kössük össze az E és a C pontokat. Az EBC háromszög derékszögű, befogói $\sqrt{3}$ és 1 hosszúak, így átfogója, $EC = 2$, tehát ez a háromszög is egy szabályos háromszög fele, $CEB\sphericalangle = 60^\circ$ és

$ECB\sphericalangle = 30^\circ$.

A DEC háromszög oldalai: $EC = 2$, $ED = 4$ és $CD = 2\sqrt{3}$, tehát ez is egy szabályos háromszög fele, $DEC\sphericalangle = 60^\circ$, $DCE\sphericalangle = 90^\circ$ és $EDC\sphericalangle = 30^\circ$.

Tekintsük ezután az ADC és a DCB háromszöget. A két háromszög hasonló, hiszen

$$\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{CB} \qquad \text{és} \qquad ADC\sphericalangle = DCB\sphericalangle = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ,$$

tehát két oldaluk aránya és az általuk közrezárt szög megegyezik. Ez azt jelenti, hogy van olyan középpontos hasonlósági transzformáció, amely az ADC háromszöget a DCB háromszögbe viszi. Mivel az AD és a DC egyenesek által bezárt szög $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, ezért az AC és a DB egyenesek által bezárt szög is 60°.