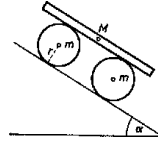


A mechanikai energiamegmaradás törvényét alkalmazzuk. Egy-egy henger tömege m , rádiusza r , a gerenda tömege M . A hengerek középpontja a , a gerenda $2a$ gyorsulással mozog (1. ábra).



1. ábra

t idő alatt a hengerek középpontjainak útja $at^2/2$, a gerenda útja at^2 . Az elért sebesség a hengerek középpontjainál $v = at$, a gerendánál $2v = 2at$. A hengerek szögsebessége $\omega = v/r$.

A súly munkavégzése a hengereknél $2mg \cdot at^2 \sin \alpha/2 = mgat^2 \sin \alpha$, a gerendánál $Mgat^2 \sin \alpha$.

A hengerek együttes mozgási energiája a középpontok haladó mozgása folytán :

$$2 \cdot \frac{mv^2}{2} = mv^2 = ma^2t^2.$$

A hengerek együttes mozgási energiája forgásuk következtében:

$$2 \cdot \frac{\omega^2 I}{2} = \omega^2 I = a^2t^2 I/r^2.$$

Itt I egy henger tehetetlenségi nyomatéka.

A gerenda mozgási energiája:

$$\frac{M(2v)^2}{2} = 2Mv^2 = 2Ma^2t^2.$$

Az energiatétel szerint:

$$mgat^2 \sin \alpha + Mgat^2 \sin \alpha = ma^2t^2 + a^2t^2 I/r^2 + 2Ma^2t^2.$$

Innen a hengerek középpontjainak gyorsulása:

$$a = \frac{m + M}{m + I/r^2 + 2M} \cdot g \sin \alpha.$$

Felhasználva a tömör henger $I = mr^2/2$ tehetetlenségi nyomatékát:

$$a = 2 \cdot \frac{m + M}{3m + 4M} \cdot g \sin \alpha.$$

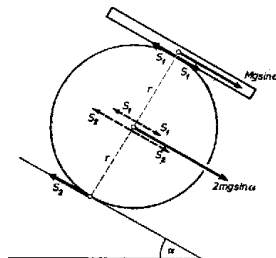
A gerenda gyorsulása ennek kétszerese: $2a = 4 \cdot \frac{m + M}{3m + 4M} \cdot g \sin \alpha$.

Ez több, mint a lejtőn való sima lecsúszásnál létrejövő $g \cdot \sin \alpha$. Tehát a hengerek előretolják a gerendát. A számításból a rádiusz kiesik.

Számadatainkkal: $m = 80$ kg, $M = 100$ kg, $\sin \alpha = 0,5$, $a = 9g/32 = 2,76$ m/s², $2a = 9g/16 = 5,52$ m/s².

Kiss Attila (Zalaegerszeg, Ságvári g. IV. o. t.)

II. megoldás. Számoljunk az erőkkel. Egyszerűség kedvéért egyesítsük a két hengert egyetlen $2m$ tömegű hengerre és tegyük rá az M tömegű gerendát (2. ábra).



2. ábra

A lejtőre merőleges erőösszetevőkkel nem kell foglalkoznunk, mert ezeket az anyagok rugalmas erői ellensúlyozzák. A gerenda és a henger között S_1 súrlódási erő keletkezik; ezzel tolja előre a henger a gerendát és ezzel tolja vissza a henger tetejét a gerenda. Az M tömegű gerenda $2a$ gyorsulással mozog az $Mg \sin \alpha$ és S_1 erők együttes hatására :

$$Mg \sin \alpha + S_1 = 2Ma.$$

A henger és a lejtő találkozási pontjában a lejtő S_2 súrlódási erővel húzza felfelé a henger alsó szélét. Ugyanekkor a henger alsó széle a lejtőt S_2 súrlódási erővel húzza lefelé, de ezzel az erővel nem kell foglalkoznunk, mert a lejtő a földhöz van rögzítve. A henger középpontjában $\pm S_1$ és $\pm S_2$ erőket veszünk fel. Itt a középpontban S_1 és S_2 levonódik a $2m$ tömegű hengereket a lejtő irányában mozgató $2mg \sin \alpha$ erőből; a megmaradt erő hatására mozog a hengerek középpontja a gyorsulással:

$$2mg \sin \alpha - S_1 - S_2 = 2ma.$$

A henger a/r szöggyorsulással forog. S_2 erő (és a középpontban felvett párja) előre, S_1 erő (és a középpontban felvett párja) hátra forgatja a hengert $S_2 r$, illetve $S_1 r$ forgatónyomatékokkal. A hengerek együttes tehetetlenségi nyomatéka $2mr^2/2 = mr^2$. A forgás alaptörvénye szerint:

$$\frac{a}{r} = \frac{S_2 r - S_1 r}{mr^2}.$$

E három egyenletből mint egyenletrendszerből számítjuk ki a gyorsulást és S_1 S_2 súrlódási erőket. Az eredmény:

$$a = 2g \sin \alpha \cdot \frac{m + M}{3m + 4M},$$

$$S_1 = Mg \sin \alpha \cdot \frac{m}{3m + 4M},$$

$$S_2 = mg \sin \alpha \cdot \frac{2m + 3M}{3m + 4M}.$$

A mi esetünkben $S_1 = 12,5g \sin \alpha = 6,25$ kp, $S_2 = 57,5g \sin \alpha = 28,75$ kp.

A súrlódási együttható. A henger és gerenda találkozási pontján a súrlódási együttható minimális értéke S_1 és $Mg \cos \alpha$ merőleges nyomóerő hányadosa:

$$\mu_1 = \frac{S_1}{Mg \cos \alpha} = \frac{m}{3m + 4M} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

A henger és lejtő találkozási pontjában a súrlódási együttható minimális értéke S_2 és $Mg \cos \alpha + 2mg \cos \alpha$ merőleges nyomóerő hányadosa:

$$\mu_2 = \frac{S_2}{Mg \cos \alpha + 2mg \cos \alpha} = \frac{m(2m + 3M)}{(2m + M)(3m + 4M)} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

A mi esetünkben $\mu_1 = \operatorname{tg} \alpha / 8 = 0,0722$ és $\mu_2 = 23 \operatorname{tg} \alpha / 104 = 0,127$.