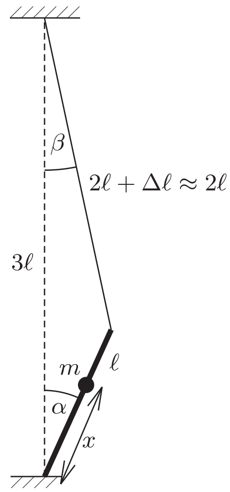
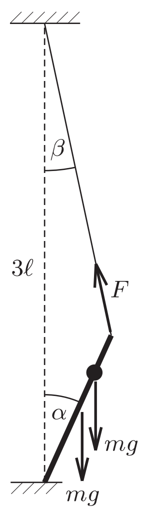
Megoldás. Azoknak a versenyzőknek sikerült jól megoldaniuk ezt a feladatot, akik elég bátrak voltak, és már kezdetben figyelembe vették, hogy elegendő az artista *kicsiny* kibillenését vizsgálni. Ők azután nem tévedtek el a tetszőleges szögekre érvényes, bonyolult összefüggések erdejében.

A *2. ábrán* a hosszakat, a *3. ábrán* az erőket ábrázoltuk az α szöggel kibillent rúd esetében. Ekkor a kötélnek a függőlegessel bezárt szöge β. Ha figyelembe vesszük, hogy kicsiny szögekről van szó, jó közelítéssel írhatjuk:

$$\beta \approx \frac{\alpha}{2}.$$



2. ábra



3. ábra

A kilendült rudat a rúdra és az artistára ható nehézségi erő tovább akarja lendíteni, a kötél rugalmassága pedig visszahúzza. A nehézségi erők forgatónyomatékának nagysága (a rúd alsó végpontjára):

$$M_1 = mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha + mgx\sin\alpha \approx$$

$$\approx mg\left(\frac{\ell}{2} + x\right)\alpha,$$

a visszahúzó kötélerő forgatónyomatékának nagysága pedig

$$M_2 = F\ell\sin(\alpha+\beta) \approx F\ell(\alpha+\beta) \approx F\ell\frac{3}{2}\alpha.$$

A stabilitás feltétele:

$$M_2 > M_1.$$

Felhasználva, hogy kis szögekről van szó:

$$F\ell\frac{3}{2}\alpha > mg\left(\frac{\ell}{2}+x\right)\alpha.$$

Ha eltekintünk a kötél kicsiny, további megnyúlásától, F továbbra is jó közelítéssel mg nagyságú marad. (F kicsiny megváltozását az ugyancsak kicsiny α-val szorozva *másodrendűen kicsiny* tagot kapunk, amit elhanyagolunk.) Ezt felhasználva a stabilitási feltétel:

$$mg\ell\frac{3}{2}\alpha > mg\left(\frac{\ell}{2}+x\right)\alpha,$$

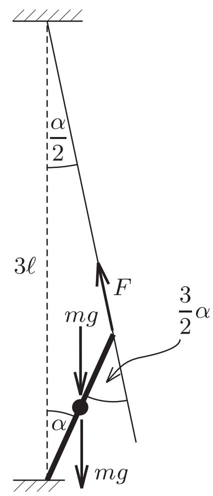
$$\frac{3}{2}\ell > \frac{\ell}{2}+x,$$

$$x < \ell.$$

Tehát az artista felmászhat egészen a rúd tetejéig, amíg csak $x < \ell$ teljesül. Ezzel válaszoltunk az a) kérdésre, most foglalkozzunk a b)-vel.

Tekintsük a *4. ábrát,* amelyen már figyelembe vettük a $\beta \approx \frac{\alpha}{2}$ közelítést, mivel továbbra is kis szögkitérésű lengésekről lehet csak szó, továbbá azt, hogy most $x = \frac{\ell}{2}$. A visszatérítő forgatónyomaték:

$$M = M_2 - M_1 = F\ell\,\frac{3}{2}\alpha - 2mg\,\frac{\ell}{2}\alpha = \ell\alpha\left(\frac{3}{2}F - mg\right) =$$
$$= \frac{1}{2}mg\ell\cdot\alpha.$$



4. ábra

Ez a visszatérő forgatónyomaték *egyenesen arányos* α-val! Ebben az esetben harmonikus rezgés (lengés) jöhet létre, melynek periódusidejét az arányossági tényezőből olvashatjuk ki. A rúdból és az artistából álló rendszer teljes tehetetlenségi nyomatéka (a rúd legalsó pontjára vonatkoztatva):

$$\Theta = \frac{1}{3}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}\,m\ell^2.$$

A harmonikus rezgőmozgásnál, ahol a visszahúzó erő nagysága $F = Dx$, fennáll a következő összefüggés:

$$\omega^2 = \frac{D}{m} = \frac{F/x}{m}\,.$$

Ezzel analóg módon a lengésekre (harmonikusan változó forgómozgásra)

$$\omega^2 = \frac{M/\alpha}{\Theta} = \frac{\frac{1}{2}\,mg\ell}{\frac{7}{12}\,m\ell^2} = \frac{6}{7}\,\frac{g}{\ell}$$

érvényes. Ebből a lengés periódusideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7}{6}\,\frac{\ell}{g}}\,, \quad \text{mivel} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}\,.$$