I. megoldás. Bontsuk fel mindkét oldalon a zárójeleket:

$$n^2 + 6n + 9 = (a + b + c)n^2 + (4a + 2b)n + (4a + b).$$

Biztosan egyenlő lesz az egyenlet bal és jobb oldala, ha n megfelelő hatványainak együtthatói egyenlőek:

$$a + b + c = 1, \tag{1}$$

$$4a + 2b = 6, \tag{2}$$

$$4a + b = 9. \tag{3}$$

A (2) egyenletből a (3)-at kivonva kapjuk, hogy $b = -3$. Innen pedig már könnyen adódik, hogy $a = 3$ és $c = 1$. Tehát $a = 3$, $b = -3$, $c = 1$ esetén mindig teljesül az egyenlőség.

Megjegyzés. Hogy van-e még megfelelő számhármas, az ebből a megoldásból nem derül ki, de nem is volt kérdés.

A rendezés után másképp is folytatható a megoldás:

II. megoldás. Ha két polinom értéke végtelen sok helyen egyenlő (pl. esetünkben a pozitív egész számokon), akkor minden valós n-re egyenlő. Két polinom értéke akkor és csak akkor egyezik meg a változó minden valós értékére, ha a két polinom együtthatónként megegyezik. Innen az I. megoldáshoz hasonló módon kapjuk, hogy $a = 3$, $b = -3$ és $c = 1$. Erre (és csak erre) a számhármasra minden valós, és így minden pozitív egész n-re is egyenlő a két polinom.

Megjegyzés. Amennyiben nem volt utalás arra, hogy az I. vagy a II. megoldással dolgozik-e a megoldó, akkor a II. szerint értékeltük. Ilyen hiány miatt keletkezett a legtöbb 2 pontos dolgozat.

III. megoldás. Ha az egyenlőség a keresett a, b, c értékek esetén minden pozitív egész n-re teljesül, akkor teljesül az $n = 1$, $n = 2$ és $n = 3$ esetén is:

$$16 = 9a + 4b + c, \tag{1}$$

$$25 = 16a + 9b + 4c, \tag{2}$$

$$36 = 25a + 16b + 9c. \tag{3}$$

Az (1) egyenletből c-t kifejezve: $c = 16 - 9a - 4b$. Ezt (2)-be helyettesítve, majd a-ra rendezve: $a = -0{,}35b + 1{,}95$. Ezt visszaírva (1)-be: $c = -1{,}55 - 0{,}85b$. Az a-ra és c-re kapott két kifejezést (3)-ba beírva, majd az egyenletet rendezve kapjuk, hogy $b = -3$. Ebből $a = 3$ és $c = 1$.

Azt kaptuk, hogy ha van megoldása a feladatnak, az csak ez a számhármas lehet. Azt, hogy egy valóban minden n-re érvényes azonosságot kaptunk, ellenőrizni kell. Írjuk be ezeket az értékeket az eredeti egyenletbe:

$$(n + 3)^2 = 3(n + 2)^2 - 3(n + 1)^2 + n^2.$$

Az egyenlet bal és jobb oldala is a következő kifejezéssel egyenlő: $n^2 + 6n + 9$, tehát valóban azonosság.

Megjegyzés. 1. A III. megoldás menetét követők közül sokan elfeledkeztek az ellenőrzésről, ők 2 pontot kaptak.

2. A megadott képlet a pozitív egész számok négyzetének sorozatára ad egy harmadrendű rekurziót.