Megoldás. Tetszőleges a pozitív számra igaz, hogy $\sqrt{a^2+1} < |a|+1$, hiszen négyzetre emelés után $a^2+1 < a^2+2|a|+1$, ami nyilván igaz. Ebből következik, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} > \frac{1}{|a|+1}\,.$$

Mivel a bizonyítandó egyenlőtlenségben az x, y, z változók négyzete szerepel feltehető, hogy egyik sem negatív. Ennek segítségével alulról becsülhetjük a bal oldali kifejezést:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} > \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\,. \tag{1}$$

Megmutatjuk, hogy a csökkentett kifejezés értéke is legalább 1:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq 1. \tag{2}$$

Minden nevező pozitív, ezért szorozhatunk a nevezőkkel:

$$(y+1)(z+1) + (x+1)(z+1) + (x+1)(y+1) \geq (x+1)(y+1)(z+1),$$

amit rendezve:

$$x+y+z+2 \geq xyz.$$

Mivel $xyz = 8$, ez éppen azt jelenti, hogy

$$x+y+z \geq 6.$$

A számtani-mértani egyenlőtlenség szerint

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} = 2.$$

Tehát ekvivalens átalakításokkal a számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget kaptuk meg, amiről tudjuk, hogy igaz, és ezzel bebizonyítottuk az (2) egyenlőtlenséget. Az (1) egyenlőtlenség miatt ebből pedig már következik a feladat állítása.