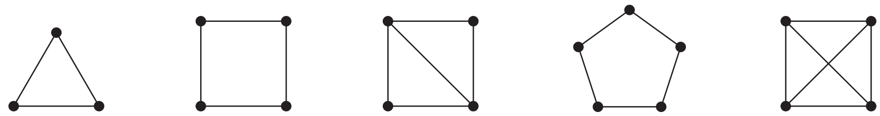
**I. megoldás.** Alkalmazzunk teljes indukciót az élszám és a csúcsszám összegére, $n$-re. Két csúcsú ilyen gráf nincs; három csúcsú egy van, a háromszög, és arra nyilván igaz az állítás. Ekkor $n = 6$, és ez az egyetlen ilyen gráf. Az ábrán látható az összes gráf $n = 6,\ 8,\ 9$ és 10 esetén ($n = 7$-re nincs megfelelő gráf). Ezen gráfok mindegyik csúcsa megfelelő csúcs.



$n = 6$ $n = 8$ $n = 9$ $n = 10$ $n = 10$

Legyen $n > 10$ és tegyük fel, hogy az állítás $k < n$ esetén igaz. Két esetet különböztetünk meg.

1) A $G$ gráfban van pontosan 2-fokú csúcs. Hagyjuk el ezt a csúcsot a gráfból a belőle induló két éllel együtt. Ha két szomszédját még nem köti össze él, akkor húzzuk be azt. Ekkor a megmaradt gráfban $n$ értéke 2-vel vagy 3-mal csökken, és így az indukció szerint igaz rá az állítás. Ha egy kör valamely éle az esetleg újonnan megjelenő él, akkor vegyük az elhagyott csúcsot a hozzá tartozó 2 éllel, így újra kört kapunk; a többi kör esetén pedig nincs szükség változtatásra.

2) Minden csúcs foka legalább 3. Ekkor bármely él elhagyásával egyrészt $n$ értéke csökken 1-gyel, másrészt a megmaradt gráfban is minden fokszám legalább 2, tehát van benne megfelelő csúcs. Nem mindegy, hogy melyik élt hagyjuk el: csak olyat hagyhatunk el, amelyik egy körön fekszik. (Mivel a gráfban minden csúcs foka legalább 2, így biztosan van benne kör.) Tekintsük a megmaradt gráfban az indukció szerint létező csúcsot. Ha ez a csúcs az elhagyott él egyik végpontjával sem esik egybe, akkor annak visszavétele után is jó lesz a keresett tulajdonságú csúcsnak. Ha pedig ezen él valamelyik végpontja, akkor az él visszavétele után erre az élre is teljesülni fog, hogy benne van egy körben – éppen ezért nem választottuk tetszőlegesen az elhagyott élt.

Az állítás tehát mindkét esetben igaz $n = k$-ra.

**II. megoldás.** Legyen a gráfban található leghosszabb út $L$, ennek egyik végpontja pedig $A$. Egy él már biztosan kiindul $A$-ból, ennek másik végpontját jelölje $B$. Mivel a gráfban minden csúcs fokszáma legalább 2, azért $A$-ból legalább még egy további él kiindul. Egy ilyen él nem lehet hurokél, mert $G$ egyszerű gráf. Az él $A$-tól különböző végpontja $L$-ben kell hogy legyen, ellenkező esetben ugyanis lenne $L$-nél hosszabb út a gráfban. Legyen ez a végpont $C$. Az $L$-nek az $A$ és $C$ csúcsot összekötő része (ami szintén út, és tartalmazza $B$-t) és az $A-C$ él kört alkotnak. Ez bármely $A$-ból induló, $AB$-től különböző élre elmondható. Az $AB$ él pedig az összes ilyen körben benne van. Így minden $A$-ból induló él benne lesz egy körben. Tehát az $A$ csúcs megfelelő.

**III. megoldás.** Végtelen gráfra az állítás nem igaz, hiszen például egy egyenes mentén elhelyezett, végtelen csúcsú gráfban, melyben a szomszédos csúcsokat köti össze él, nincs kör.

Tegyük föl, hogy a gráf véges, és nem igaz rá az állítás, azaz minden csúcsához van belőle kiinduló olyan él, amely nincs benne egy körben sem. Az ilyen élt a továbbiakban nevezzük rossz élnek.

Mivel a gráf minden csúcsának legalább 2 a fokszáma, biztosan tartalmaz kört.

Tekintsünk $G$-ben egy $K_1$ kört. Ennek minden csúcsából kiindul egy rossz él, ami így nincs benne $K_1$-ben. Vegyük a kör valamely $C_1$ csúcsát, s az ebből kiinduló rossz él másik végpontját véve második csúcsnak, induljunk el $C_1$-ből a rossz él irányában. Ennek az élnek a másik végpontja legyen $C_2$. Legyen egy lépés az, hogy egy $C_i$ csúcsból ($i \geq 2$) a $C_{i+1}$ csúcsba lépünk úgy, hogy $C_{i+1} \neq C_{i-1}$, valamint a $C_i$ és a $C_{i+1}$ csúcsot él köti össze. (A továbblépés mindig lehetséges, mert $C_i$ fokszáma legalább 2.) Addig menjünk, amíg vissza nem érünk egy olyan csúcsba, ahol már jártunk (ez biztosan bekövetkezik, mert $G$ véges). Ekkor sohasem juthatunk el a $K_1$ kör valamelyik csúcsába, mert ekkor onnan $C_1$-be is eljuthatnánk, s ezáltal a kiinduló rossz él benne lenne egy körben, ami ellentmondás. Így a visszacsatlakozásig bejártunk egy $K_1$-től diszjunkt $K_2$ kört. Ezután általában a $K_i$ körnek ($i \geq 2$) vegyük egy attól a csúcstól különböző csúcsát, melynél beérkeztünk a $K_i$ körbe, majd egy ebből kiinduló rossz élt, s ezen induljunk el a fenti módszer szerint. Kapunk egy $K_i$-től diszjunkt $K_{i+1}$ kört. Ez minden $K_j$ ($j < i$) körtől is diszjunkt, mert ezek egy csúcsába se juthattunk el a $K_i$ körből, hiszen ekkor ezekből a $K_i$ körbe is visszajuthatnánk, ezzel egy rossz élt egy körbe foglalva, ami nem lehetséges. Így pedig végtelen sok diszjunkt körnek kellene lennie $G$-ben, ami nem lehetséges, hiszen $G$ véges.

Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát a feladat állítását bebizonyítottuk.