Megoldás. Nyilván $y \neq 0$. Alakítsuk át az egyenletet:

$$1 = 2^{\frac{x-y}{y}} - \frac{3}{2}\,y = 2^{\frac{x}{y}-1} - \frac{3}{2}\,y = \frac{2^{\frac{x}{y}}}{2} - \frac{3}{2}\,y.$$

Ebből

$$2^{\frac{x}{y}} - 2 = 3y. \tag{1}$$

A jobb oldalon álló szám osztható 3-mal. A bal oldalon álló kifejezés

$$2^{\frac{x}{y}} - 2 > -2, \tag{2}$$

mert 2 hatványai pozitív számok és (1) miatt $2^{\frac{x}{y}}$ csak egész szám lehet. Tehát $\frac{x}{y}$ is egész szám. (1)-ből és (2)-ből következik, hogy $3y > -2$, és mivel $y \neq 0$, azért $y > 0$ is teljesül.

Az (1) egyenletet vizsgáljuk. A bal oldalon egy 2-hatványnál 2-vel kisebb szám áll, ami 3-mal osztható.

I. eset: ha $\frac{x}{y} = 2n$, akkor $2^{\frac{x}{y}} = 2^{2n} = (2^n)^2$, ami 3-mal osztva 1 maradékot ad, és így a bal oldal 3-mal vett osztási maradéka 2. Tehát ekkor nem kapunk megoldást.

II. eset: ha $\frac{x}{y} = 2n+1$, akkor $2^{\frac{x}{y}} = 2^{2n+1} = 2 \cdot 2^{2n}$ alakú a 2-hatvány, aminek 3-mal való osztási maradéka 2. Így a bal oldal 3-mal osztható, vagyis ebben az esetben van megoldás: $2^{2n+1} - 2 = 3y$, amiből

$$y = \frac{2^{2n+1} - 2}{3}.$$

Így $\frac{x}{y} = 2n+1$ miatt

$$\frac{x}{\frac{2^{2n+1}-2}{3}} = 2n+1, \quad \text{ahonnan} \quad x = \frac{(2n+1)\left(2^{2n+1}-2\right)}{3}.$$

A megoldás:

$$x = \frac{(2n+1)\left(2^{2n+1}-2\right)}{3}, \quad y = \frac{2^{2n+1}-2}{3}, \quad \text{ahol } n \in \mathbb{Z}^+.$$