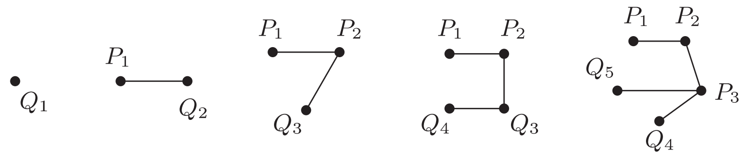
I. megoldás. Az n csúcsú gráfban jelöljük az ugróiskolához tartozó pontokat $P_1, P_2, \ldots, P_k$-val, az egyéb csúcsokat pedig $Q_{k+1}, \ldots, Q_n$-nel, ahol minden $i = 1, 2, \ldots, k$-ra a P_i csúcs fokszáma i.

A gráf egyszerű, ezért nem lehet benne hurokél és többszörös él. Könnyen belátható, hogy $n = 1, 2, 3, 4, 5$ esetben az ugróiskolának rendre 0, 1, 2, 2, 3 csúcsa lehet. Ezeket az eseteket az *1. ábra* mutatja be.



1. ábra

A továbbiakban megmutatjuk, hogy $n \geq 6$ ($n \in \mathbb{N}^+$) esetén a feladat feltételeinek megfelelően egy n csúcsú gráfban legfeljebb $n - 3$ csúcsú ugróiskola alakítható ki.

A $P_1, P_2, \ldots, P_k$ ugróiskola speciálisan egy út, ezért él köti össze a P_1P_2, P_2P_3, $\ldots$, $P_{k-1}P_k$ pontpárokat. Először azt látjuk be, hogy a gráfban $k < n - 2$:

Az ugróiskolában P_1 csak P_2-vel, P_2 pedig csak a P_1 és P_3 csúcsokkal van összekötve. Így, $n - 2 \geq 4$ miatt, ha létezne P_{n-2}, akkor sem P_1-gyel, sem P_2-vel, sem pedig önmagával nem lehetne összekötve, így fokszáma legfeljebb $n - 3$, azaz $(n - 2)$-nél kevesebb lenne, ami ellentmondás.

Ezután megadunk egy olyan n csúcsú gráfot, amelyben létezik $n - 3$ csúcspontú ugróiskola. Ehhez az alábbi élek berajzolása szükséges:

- a P_1 pontot csak P_2-vel kötjük össze (fokszáma 1);
- a P_2 pontot csak P_1-gyel és P_3-mal kötjük össze (fokszáma 2).

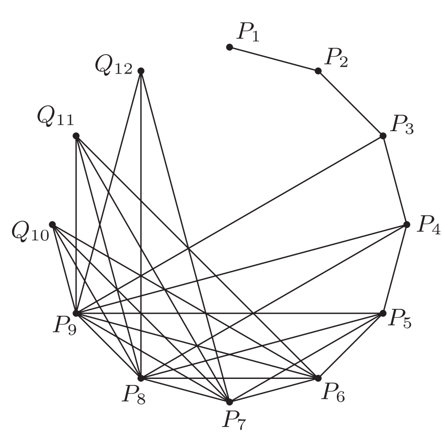
Ezután az ugróiskola utolsó pontjától visszafelé haladva:

- a P_{n-3} pontot P_1, P_2 és P_{n-3} kivételével minden ponttal összekötjük (fokszáma $n - 3$);
- a P_{n-4} pontot P_1, P_2, P_3 és P_{n-4} kivételével minden ponttal összekötjük (fokszáma $n - 4$) stb.;
- $\ldots$;
- páros n esetén: $n = 2l$, a P_l pontot a P_{l-1}, P_{l+1}, $\ldots$, $P_{2l-3} = P_{n-3}$, Q_{2l-2}, Q_{2l-1} pontokkal kötjük össze (fokszáma l);
- páratlan n esetén: $n = 2l + 1$, a P_l pontot a P_{l-1}, P_{l+1}, $\ldots$, $P_{2l-2} = P_{n-3}$, Q_{2l-1} pontokkal kötjük össze (fokszáma l).

Így a P_3 pont P_2, P_4, P_{n-3}-mal lesz összekötve, és fokszáma 3 lesz. A P_4 pont P_3, P_5, P_{n-3}, P_{n-4}-gyel lesz összekötve, és fokszáma 4 lesz, és így tovább haladva az index növekedésével egyesével nő a pontok fokszáma is:

- páros n esetén: $n = 2l$, a P_{l-1} pontot a P_{l-2}, P_{l+1}, P_{l+2}, $\ldots$, $P_{2l-3} = P_{n-3}$, Q_{2l-2}, pontokkal kötjük össze (fokszáma $l - 1$);
- páratlan n esetén: $n = 2l + 1$, a P_{l-1} pontot a P_{l-2}, P_{l+1}, P_{l+2}, $\ldots$, $P_{2l-2} = P_{n-3}$ pontokkal kötjük össze (fokszáma $l - 1$).

A *2. ábra* $n = 12$ esetén mutatja be az elkészült gráfot.



2. ábra

Eredményeinket összefoglalva:

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ esetén $k = 0, 1, 2, 2, 3$, $n \geq 6$ esetén pedig legfeljebb $n - 3$ csúcsú ugróiskola létezhet a feladat feltételeinek megfelelően az n csúcspontú egyszerű gráfban.

II. megoldás. Könnyen belátható, hogy $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ esetben az ugróiskolának rendre legfeljebb $k = 0, 1, 2, 2, 3, 3, 4$ csúcsa lehet. Sejtésünk, hogy további n-ekre $k = n - 3$. Ezt fogjuk bizonyítani.

Először tegyük fel, hogy létezik $n - 2$ csúcsú ugróiskola az n csúcsú gráfban. Ekkor a P_{n-2} csúcsból nem mehet él a P_1-be (hiszen P_1-ből csak 1 él indulhat ki P_2-be), nem mehet él a P_2-be (hiszen P_2-ből csak két él indul P_1-be és P_3-ba) és nem mehet él önmagába (hiszen a gráf egyszerű). Tehát csak $n - 3$ él indulhat belőle, ami ellentmondás.

Ezért az ugróiskolának legfeljebb $n - 3$ csúcsa lehet. Teljes indukciót alkalmazva megmutatjuk, hogy ez mindig elérhető.

Az állítás $n = 6$-ra és $n = 7$-re igaz.

Tegyük fel, hogy az állítás $(n-2)$-re igaz, a legnagyobb fokszámú csúcs foka $n-5$. Ekkor vegyünk fel két új pontot. Az egyik pontot – ez lesz az új gráf P_1 pontja – kössük össze az $n - 2$ csúcsú gráf első pontjával; az lesz az új gráf P_2 pontja (fokszáma 2). A másik pontot pedig kössük össze az $n - 2$ csúcsú gráf $P_2, \ldots, P_{n-5}$ pontjaival, valamint a megmaradt 3 csúccsal ($n - 4$, $n - 3$ és $n - 2$). Ekkor ezen pont fokszáma: $(n - 5) - 1 + 3 = n - 3$ lesz, tehát ez lesz az új gráfban a P_{n-3} pont. A régi gráf $P_2, \ldots, P_{n-5}$ pontjainak fokszáma eggyel nő, ezek lesznek az új gráf $P_3, \ldots, P_{n-4}$ pontjai.

Az így létrehozott új gráf $P_1, \ldots, P_{n-3}$ pontjai a feltételeknek megfelelő ugróiskolát alkotnak az n csúcsú gráfban.

Beláttuk, hogy az állítás $(n - 2)$-ről n-re öröklődik, így a teljes indukció elvéből következően $n = 6$, illetve $n = 7$ esetekből kiindulva minden n-re igaz.