I. megoldás. Azt mondjuk, hogy az a városból *elérhető* a b város, ha csak vonaton vagy csak buszon el lehet jutni (esetleg átszállásokkal) a-ból b-be. A feladatot az országban található városok n száma szerinti indukcióval oldjuk meg. A feladat állítása $n = 1$ esetén világos. Tegyük fel tehát, hogy n-nél kevesebb városra már igazoltuk az állítást, és tekintsünk egy n városból álló országot a leírt feltételekkel.

Legyen v az ország egy tetszőleges városa, és tekintsük a v-től különböző $n-1$ várost. Ezen $n-1$ város közül bármely kettőre igaz, hogy valamelyikükből (esetleg v-n is átutazva) elérhető a másik. Módosítsuk az $n-1$ városból álló hálózatot (gondolatban) úgy, hogy a létező járatok mellett odaképzeljük azokat is, amelyek csak v-n átutazva valósíthatóak meg. Az így kibővített, $n-1$ városból álló hálózatra alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, tehát van egy olyan $f(v)$ város az $n-1$ között, amelyből minden v-től különböző város elérhető. Ha v is elérhető $f(v)$-ből, akkor készen vagyunk, hiszen $f(v)$ megfelel a kívánalmaknak.

Ha tehát v nem érhető el $f(v)$-ből, akkor a feltétel szerint $f(v)$ elérhető v-ből, és az általánosság megszorítása nélkül az is feltehető, hogy ez busszal lehetséges. Legyen B, illetve V az $f(v)$-ből busszal, illetve vasúton elérhető, $f(v)$-től különböző városok halmaza. Tekintsük a városok $V' := V \cup \{v\}$ halmazát. Mivel $f(v)$ nincs V'-ben, azért V' legfeljebb $n-1$ várost tartalmaz. Az is igaz, hogy V' bármely két városa közül egyikből elérhető a másik (esetleg V'-n kívüli városok érintésével). A korábban látott módon alkalmazhatjuk az indukciós feltevést V'-re, így van benne olyan v' város, amelyből minden V'-beli város elérhető.

Ha $v' = v$ ez a város, akkor v megfelel a feladat kívánalmainak, hiszen v-ből minden V-beli város elérhető v' választása miatt, és azt is láttuk, hogy busszal v-ből $f(v)$ és az összes B-beli város is elérhető.

Ha pedig $v' \neq v$, akkor $v' \in V$, és ekkor v'-ből V minden városa és v is elérhető. Ha v vonattal érhető el v'-ból, akkor v elérhető lenne vonattal v'-n keresztül $f(v)$-ből is, amiről korábban feltettük, hogy lehetetlen. Ezek szerint v busszal érhető el v'-ből. Azonban ekkor v-n keresztül $f(v)$ és így B minden városa is elérhető v'-ből busszal, ami éppen azt jelenti, hogy v' rendelkezik a feladatban megkövetelt tulajdonsággal. $\square$

A fenti bizonyításban az indukciós lépés „ravasz”. Az indukciót azonban a fenti megoldás első két bekezdése után máshogyan is befejezhetjük.

II. megoldás. Ha az ország valamelyik v városa elérhető $f(v)$-ből, akkor készen vagyunk, hisz ekkor $f(v)$-ből minden város elérhető. Tegyük fel tehát, hogy ez egyetlen v városra sem igaz, így a feladatbeli feltétel szerint bármelyik v városból elérhető $f(v)$.

Legyen v egy tetszőleges város, és tekintsük a városok

$$v, f(v), f\big(f(v)\big), f\Big(f\big(f(v)\big)\Big), \ldots$$

sorozatát. Mivel véges sok város van, ezért a sorozatban előbb-utóbb felbukkan egy már korábban felsorolt város is. Találunk tehát egymástól különböző $v_1, v_2, \ldots, v_k$ városokat úgy, hogy $i = 1, 2, \ldots, k$-ra

$f(v_i) = v_{i+1}$ teljesül (ahol $v_{k+1} = v_1$). A $v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$ városok tehát rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy tetszőleges v_i-ből v_{i-1} kivételével minden másik v_j város elérhető. Ez azt is jelenti, hogy $k \geq 3$, hiszen v_1-ből v_2 elérhető, de v_k nem.

Tegyük fel, hogy valamelyik v_{i-1}-ből v_i vonattal, míg v_i-ből v_{i+1} busszal érhető el. Tudjuk, hogy v_{i+1}-ből v_{i-1} elérhető. Ha ez busszal lehetséges, akkor v_i-ből busszal v_{i+1}-ben átszállva v_{i-1}-be juthatunk, amiről feltettük, hogy nem lehetséges. Ha v_{i+1}-ből vonattal lehet v_{i-1}-be eljutni, akkor innen vonattal továbbutazhatunk v_i-be, ami $f(v_i) = v_{i+1}$ miatt szintén nem lehetséges. Azt kaptuk tehát, hogy a v_{i-1}-ből v_i-be jutás eszközének azonosnak kell lennie a v_i-ből v_{i+1}-be jutás eszközével.

Ha tehát v_1-ből busszal juthatunk v_2-be, akkor v_2-ből v_3 is busszal érhető el, majd v_3-ból v_4-be is busszal juthatunk, és így tovább egészen v_k-ig. Vagyis v_1-ből v_k elérhető, ami ellentmond annak a feltevésünknek, hogy egyetlen v város sem érhető el $f(v)$-ből. Kell lennie tehát olyan v városnak, ami $f(v)$-ből elérhető, ám ekkor $f(v)$ rendelkezik a feladatban megkövetelt tulajdonsággal. $\square$

Megjegyzések. 1. Kettőnél több közlekedési eszköz esetén már nincs feltétlenül olyan város, ahonnan minden más város elérhető. Ez a helyzet, ha például A-ból B-be busz, B-ből C-be vonat és C-ből A-ba mondjuk kishajó közlekedik.

2. Ha nem tesszük fel, hogy bármely két város között van valamelyik irányba közlekedés, akkor nem mindig létezik olyan város, amelyikből minden másik elérhető. Igaz azonban, hogy található városoknak egy olyan V halmaza, hogy semelyik V-beli városból sem érhető el semelyik másik V-beli város, azonban bármelyik V-n kívüli város elérhető valamelyik V-beli városból. Nem látszik, hogy a fent közölt megoldások bármelyike kiterjeszthető-e az általánosabb állítás bizonyításává.

3. A közölt megoldások egyike sem algoritmikus, azaz egy kívánt tulajdonságú város megtalálására nem ad annál jobb módszert, mint hogy sorra ellenőrizzük az egyes városokat. Létezik olyan (n-től független) c konstans, hogy tetszőleges városról el tudjuk dönteni cn lépésben, hogy rendelkezik-e a kívánt tulajdonsággal (ahol n az ország városainak számát jelöli), így az egymás utáni ellenőrzéseket legfeljebb cn^2 lépésben el tudjuk végezni. A 2. megjegyzésben jelzett V halmaz megtalálása a részhalmazok egyenkénti ellenőrzésével már sokkal több lépést igényelne. Létezik azonban olyan A algoritmus és C konstans, hogy bármely n városból álló országban az A algoritmus legfeljebb $C \cdot n^2$ lépés után megtalál egy, a 2. megjegyzésben leírt V városhalmazt.

4. A feladat bizonyos rokonságot mutat *Gale* és *Shapley* (sajnos nem eléggé) ismert „stabil házassági” tételével. A részleteket egy remélhetőleg hamarosan megjelenő KöMaL cikk tartalmazza.