Megoldás. Jelölje $f(n)$ az $1, 2, \ldots, n$ számok között fellépő kettőhatvány különbségek számát, $F(n)$ pedig legyen az n különböző egész között fellépő kettőhatvány különbségek maximális száma. Ezzel a feladat állítása $F(n) = f(n)$ alakot ölt, amit n szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Az $n = 1$ esetet triviális, hisz $F(1) = f(1) = 0$.

Tegyük fel tehát, hogy $n < N$ esetén már igazoltuk az $F(n) = f(n)$ egyenlőséget. Célunk az $F(N) = f(N)$ bizonyítása. Legyenek tehát az $a_1 < a_2 < \ldots < a_N$ egészek olyanok, hogy a belőlük képezhető kettőhatvány különbségek száma $F(N)$, és az ilyen tulajdonságú sorozatok közül olyat válasszunk, amire az $a_N - a_1$ különbség a lehető legkisebb.

Feltehető, hogy az a_i számaink között van páros. Ha ugyanis minden a_i páratlan, akkor az $\{a_i + 1\colon 1 \le i \le N\}$ halmazból a képezhető kettőhatvány különbségek száma $F(N)$, és a legnagyobb és legkisebb szám különbsége sem változott. Ha netán minden a_i páros, akkor az egész számokból álló $\{a_i/2\colon 1 \le i \le N\}$ halmazból is $F(N)$ kettőhatvány különbség képezhető, ráadásul a legnagyobb és legkisebb szám különbsége csökkent. Mivel az $a_1, a_2, \ldots, a_N$ sorozatot úgy választottuk, hogy ez a különbség minimális legyen, az $a_1, a_2, \ldots, a_N$ számok között bizonyosan van páros és páratlan is. Legyen tehát k a páros és $N - k$ a páratlan a_i-k száma, ahol $1 \le k < N$. Az is feltehető, hogy $k \le \dfrac{N}{2}$, ha ugyanis ez nem így volna, akkor minden a_i-t eggyel megnövelve olyan sorozatot kapnánk, amiben kevesebb a páros szám mint a páratlan, a kettőhatvány különbségek száma $F(N)$ és a legnagyobb és legkisebb szám különbsége sem változik ettől.

A sorozatunkban fellépő kettőhatvány különbségek háromfélék lehetnek. Két páros szám között fellépő kettőhatvány különbségből az indukciós feltevés szerint legfeljebb $f(k)$ lehet, ami megegyezik a $2, 4, \ldots, 2k$ számok között fellépő kettőhatvány különbségek számával. Hasonlóan, a páratlan a_i-k szintén az indukciós feltevés szerint legfeljebb $f(N-k)$ kettőhatvány különbséget határoznak meg, és ez éppen az

$1, 3, 5, \ldots, 2(N-k)-1$ számok között fellépő kettőhatvány különbségek száma. Végül a páros és páratlan a_i-k között fellépő kettőhatvány különbségek páratlanok, így 1-gyel egyenlők. Minden páros a_i legfeljebb két ilyen különbségben szerepelhet, ezért legfeljebb $2k$ lehet ezekből, de az is igaz, hogy minden ilyen különbség $a_{i+1} - a_i$ alakú, amiből összesen $N - 1$ van. Figyeljük meg, hogy a $\{2, 4, \ldots, 2k\}$ és $\big\{1, 3, 5, \ldots, 2(N-k) - 1\big\}$ halmazokból egy-egy elemet kiválasztva pontosan $2k$-féleképpen választhatunk szomszédos számokat, kivéve, ha $k = \dfrac{N}{2}$, amikor csak $N - 1$ ilyen választás lehetséges.

Azt kaptuk, hogy az általunk vizsgált $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ halmazban legfeljebb annyi kettőhatvány különbség lép fel, mint a $H = \big\{1, 2, 3, \ldots, 2k, 2k+1, 2k+3, 2k+5, \ldots, 2(N-k)-1\big\}$ halmazban. Ezért az indukciós lépés befejezéséhez azt kell megmutatnunk, hogy a H halmaz legfeljebb annyi kettőhatvány különbséget határoz meg, mint az $[N] := \{1, 2, \ldots, N\}$ halmaz. Ha $k = \dfrac{N}{2}$, akkor $H = [N]$, és nincs mit bizonyítanunk. A továbbiakban feltesszük tehát, hogy $k < \dfrac{N}{2}$.

Vegyük észre, hogy $[2k+1] := \{1, 2, \ldots, 2k+1\}$ részhalmaza H-nak és $[N]$-nek is, ezért a $[2k+1]$ halmazon belül fellépő kettőhatvány különbségek nem okoznak eltérést.

A $H \setminus [2k+1] = \big\{2k+3, 2k+5, \ldots, 2(N-k)-1\big\}$, illetve $[N] \setminus [2k+1] = \{2k+2, 2k+3, \ldots, N\}$ halmazok egyaránt $f(N - 2k - 1)$ kettőhatvány különbséget határoznak meg. Annyit kell tehát bizonyítanunk, hogy a $[2k+1]$ halmaz és a $H \setminus [2k+1]$ halmaz elemei között fellépő kettőhatvány különbségek száma nem lehet több, mint a $[2k+1]$ halmaz és az $[N] \setminus [2k+1]$ halmaz elemei között fellépő kettőhatvány különbségek száma. Ha azonban az $x \in [2k+1]$ és az $y \in H \setminus [2k+1]$ számok különbsége kettőhatvány, akkor mivel e különbség legalább 2 és y páratlan, ezért x-nek is annak kell lennie. Így a $(2k+1)$-ből „felére kicsinyített”

$$x' := 2k+1 - \frac{1}{2}(2k+1-x) \quad \text{és} \quad y' := 2k+1 + \frac{1}{2}\big(y - (2k+1)\big)$$

számok a $[2k+1]$, illetve $[N] \setminus [2k+1]$ halmazok olyan elemei, amik különbsége

$$y' - x' = 2k+1 - (2k+1) + \frac{1}{2}\big(y - (2k+1) + 2k+1 - x\big) = \frac{1}{2}(y - x)$$

szintén kettőhatvány.

Azt kaptuk, hogy minden H-beli kettőhatvány különbséghez találtunk egy-egy különböző kettőhatvány különbséget $[N]$-ben, és ezzel az indukciós lépést igazoltuk, a feladat állítását pedig bebizonyítottuk. $\square$

Megjegyzés. 1. Nem igaz, hogy ha az $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ sorozat maximális számú kettőhatvány különbséget határoz meg, akkor számtani sorozatról van szó: az 1, 2, 3, 4 és az 1, 2, 3, 5 sorozatok mindegyikéből ötféleképp lehet kettőhatvány különbséget képezni.

2. A feladat állítása 2 helyett más pozitív egész szám hatványaira is igaz, de ennek bizonyítása a feladatbeli állításnál valamivel bonyolultabb.