Megoldás. Azt a legkisebb c-t keressük, amire $c \geq \dfrac{d(n)}{\sqrt{n}}$ teljesül minden pozitív egész n-re. Tudjuk, hogy ha az n kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, akkor n osztóinak száma
$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$. Eszerint

$$c^2 \geq \frac{d(n)^2}{n} = \frac{(\alpha_1+1)^2(\alpha_2+1)^2 \ldots (\alpha_k+1)^2}{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}} = \frac{(\alpha_1+1)^2}{p_1^{\alpha_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{(\alpha_k+1)^2}{p_k^{\alpha_k}}. \tag{1}$$

Ahhoz, hogy a feladatban leírt, lehető legkisebb c-t megkeressük, az szükséges, hogy (1) jobb oldalát maximalizáljuk. (Pontosabban az, hogy megtaláljuk a szuprémumát, de mint látni fogjuk, ez itt maximalizálást jelent.) Az (1) formula jobb oldala pedig akkor lesz a lehető legnagyobb, ha minden p_i prímhez olyan $\alpha_i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ kitevőt választunk, ami maximalizálja az

$$\frac{(\alpha_i+1)^2}{p_i^{\alpha_i}} = \frac{(2/1)^2}{p_i} \cdot \frac{(3/2)^2}{p_i} \cdot \frac{(4/3)^2}{p_i} \cdot \ldots \cdot \frac{\big((\alpha_i+1)/\alpha_i\big)^2}{p_i} \tag{2}$$

egyenlőség bal oldalát. A (2) jobb oldalán álló törtek számlálója szigorúan monoton csökken, nevezőjük azonos, tehát a szorzatuk akkor lesz maximális, ha α_i-t úgy választjuk, hogy a szorzatba pontosan az

1-nél nagyobb $\dfrac{\big((s+1)/s\big)^2}{p_i}$ alakú tényezők kerüljenek. Ha $p_i > 4$, akkor már a szorzat első tényezője is egynél kisebb. Ezért ha egy szám kanonikus alakjából elhagyjuk a 4-nél nagyobb prímosztókat, akkor ettől a $d(n)/\sqrt{n}$ hányados növekszik. Tehát elegendő csak azokkal a számokkal foglalkoznunk, amiknek a prímosztói csak a 2 és a 3 lehetnek. A 2 és 3 prímosztók maximumot meghatározó kitevőit szintén a fentiek figyelembe vételével kaphatjuk meg; vegyük ugyanis észre, hogy

$$\frac{(3/2)^2}{2} > 1 > \frac{(4/3)^2}{2}, \quad \text{illetve} \quad \frac{(2/1)^2}{3} > 1 > \frac{(3/2)^2}{3}.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\dfrac{d(n)}{\sqrt{n}}$ kifejezés $n = 2^2 \cdot 3 = 12$-re maximális. Tehát a keresett legkisebb c érték nem más, mint

$$c = \frac{d(12)}{\sqrt{n}} = \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{4 \cdot 3}} = \frac{3 \cdot 2}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}. \quad \square$$

Megjegyzés. A megoldás módszerével megmutatható, hogy tetszőleges pozitív ε kitevőre létezik egy olyan c_ε szám, amire $d(n) \leq c_\varepsilon \cdot n^\varepsilon$ teljesül minden pozitív egész n számra úgy, hogy van olyan pozitív egész n_ε, amire egyenlőség áll. Ebből az is következik, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d(n)}{n^\varepsilon} = 0.$$

Ez úgy is kimondható, hogy $\log d(n)/\log n \to 0$, ha $n \to \infty$. (Itt feltehető, hogy pl. e alapú logaritmusról beszélünk, hisz az (1-nél nagyobb) alap sem a konvergencia tényét, sem a határértéket nem befolyásolja.) Megjegyezzük, hogy az az erősebb állítás is igaz, hogy alkalmas C konstanssal minden pozitív egész n-re:

$$\frac{\log d(n)}{\log n} < \frac{C}{\log\log n}.$$

Ez a felső becslés pedig már konstans szorzótól eltekintve pontos és nem javítható tovább. Mindez az $n = p_1 p_2 \ldots p_k$ alakú számokat vizsgálva látható be, ahol $p_1 < p_2 < \ldots < p_k < \ldots$ az egymást követő prímek sorozata. Vagyis a fenti egyenlőtlenség lényegében éles, ha n az első k prím szorzata.