

**Megoldás.** Tegyük fel, hogy van egy olyan két részes edényünk, amelynek egyik rekeszébe vizet, a másikba gyógyvizet tudunk önteni úgy, hogy nem keverednek össze, de a hőmérsékletük kiegyenlítődik. Feltételezzük, hogy hőcsere csak a két rekesz között történik, a környezetet nem melegítjük.

Amennyiben a „gyógyvíz” és a „víz” fajhőjét ugyanakkorának tekinthetjük, a kiegyenlítő hőmérséklet az összetevők hőmérsékletének tömegükkel súlyozott számtani közepe lesz. Ha például  $M$  tömegű, (Celsius-fokban mérve)  $T_0$  hőmérsékletű gyógyvizet és  $m$  tömegű  $100^\circ\text{C}$ -os vizet öntünk a rekeszekbe, a közös hőmérséklet

$$T_1 = \frac{M \cdot T_0 + m \cdot 100}{M + m}$$

lesz. ( $M = m = 1$  kg esetén  $50^\circ\text{C}$  lenne a közös hőmérséklet, ez nem elegendő!)

Osszuk fel a  $100^\circ\text{C}$ -os vizet 6 egyforma,  $\frac{1}{6}$  kg-os részre! A hőcsere elő edény egyik rekeszébe öntsük a gyógyvizet, a másik felébe először  $\frac{1}{6}$  kg  $100^\circ\text{C}$ -os vizet. A hőmérséklet kiegyenlítése után a közös hőmérséklet a fenti képlet alapján számolva

$$T_1 = \frac{1 \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 100}{\frac{7}{6}} = 14,28^\circ\text{C}$$

lesz. Öntsük most ki a lehűlt „vizet”, és töltsünk a helyére  $\frac{1}{6}$  kg  $100^\circ\text{C}$ -os vizet! Hőcsere után

$$T_2 = \frac{1 \cdot 14,28 + \frac{1}{6} \cdot 100}{\frac{7}{6}} = 26,53^\circ\text{C}$$

közös hőmérséklet alakul ki. Az eljárást tovább ismételve a 6. hőcsere után a gyógyvíz hőmérséklete  $T_6 = 60,34^\circ\text{C}$ , tehát a feladat kívánalmainak megfelelő lesz.

A feladatot általánosabban is tárgyalhatjuk. Ha nem 6, hanem tetszőleges  $n$  részre osztjuk a  $T_f$  hőmérsékletű „forróvizet”, és az egyes részeket egymás után termikus kapcsolatba hozzuk a kezdetben  $T_0$  hőmérsékletű hideg vízzel, akkor az első hőcsere után a kialakuló közös  $T_1$  hőmérsékletre a kalorimetrikus egyenlet így írható:

$$cm(T_1 - T_0) = c \frac{m}{n}(T_f - T_1), \quad \text{ahonnan} \quad T_1 = \frac{T_f + nT_0}{n + 1}.$$

A második hőcsere után kialakuló hőmérséklet

$$T_2 = \frac{T_f + nT_1}{n + 1} = \frac{T_f(2n + 1) + n^2T_0}{(n + 1)^2},$$

és így tovább. Az  $n$ -edik lépés végén

$$T_n = \frac{(n + 1)^{n-1} + n(n + 1)^{n-2} + \dots + n^{n-2}(n + 1) + n^{n-1}}{(n + 1)^n} T_f + \left(\frac{n}{n + 1}\right)^n T_0.$$

A képletben felfedezhető egy mértani sor, amelynek összegképletét beírva a végső hőmérsékletre a

$$T_n = \left(1 - \left(\frac{n}{n + 1}\right)^n\right) T_f + \left(\frac{n}{n + 1}\right)^n T_0$$

eredményt kapjuk. ( $n = 6$ -ra visszakapjuk a korábban kiszámított  $60,34^\circ\text{C}$ -os értéket;  $n = 5$ -nél viszont csak  $59,8^\circ\text{C}$ , tehát  $60$  fok alatti érték adódik.)

*Megjegyzés.* Belátható, hogy  $n$  növelésével a végső hőmérséklet egyre nagyobb lesz, de tetszőlegesen nagy  $n$ -nél sem haladhatja meg a

$$T_\infty = \left(1 - \frac{1}{e}\right) T_f + \frac{1}{e} T_0$$

hőmérsékletet. Ez a határérték a feladatban szereplő számoknál  $63,2^\circ\text{C}$ , tehát alig nagyobb, mint a már  $n = 6$  esetén is túllépett  $60^\circ\text{C}$ .