

Megoldás. A 2ℓ hosszú, m tömegű homogén rúd tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontjára vonatkoztatva

$$\Theta_{\text{tkp.}} = \frac{1}{12}m(2\ell)^2 = \frac{1}{3}m\ell^2.$$

Amennyiben ez a rúd egy R sugarú kör mentén mozoghat, a kör középpontján áthaladó forgástengely

$$h = \sqrt{R^2 - \ell^2}$$

távolságban lesz a rúd tömegközéppontjától. A forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték a Steiner-tétel szerint:

$$\Theta_t = \Theta_{\text{tkp.}} + mh^2 = \frac{1}{3}m\ell^2 + m(R^2 - \ell^2) = m\left(R^2 - \frac{2}{3}\ell^2\right).$$

A függőleges síkban kis rezgéseket végző rúd periódusidejét a fizikai inga lengésidő-képletéből számíthatjuk ki:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_t}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2 - \frac{2}{3}\ell^2}{g\sqrt{R^2 - \ell^2}}}.$$

A rezgés frekvenciája tehát

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g\sqrt{R^2 - \ell^2}}{3R^2 - 2\ell^2}}.$$

Megjegyzések. 1. Ha $\ell \ll R$, a lengésidő képlete a matematikai inga

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

formuláját adja vissza. A másik határesetben, amikor R csak nagyon kicsivel nagyobb ℓ -nél, a lengésidő igen nagy, a frekvencia pedig igen kicsi lesz.

2. Ha a feladatban szereplő mozgást valaki kísérletileg is tanulmányozni akarja, a (jó közelítéssel) súrlódás nélküli mozgást a rúd végeihez erősített R hosszú fonalakkal oldhatja meg. Amennyiben 2-2 fonalat köt a rúd végeihez, és azokat kicsit „szétterpesztve” rögzíti a forgástengelyhez, ezzel a „bifiláris felfüggesztésnek” nevezett elrendezéssel még a lengési sík elfordulását is megakadályozhatja.