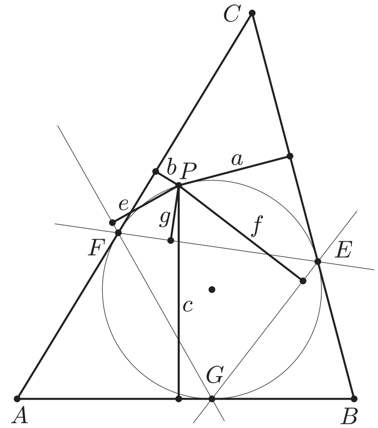
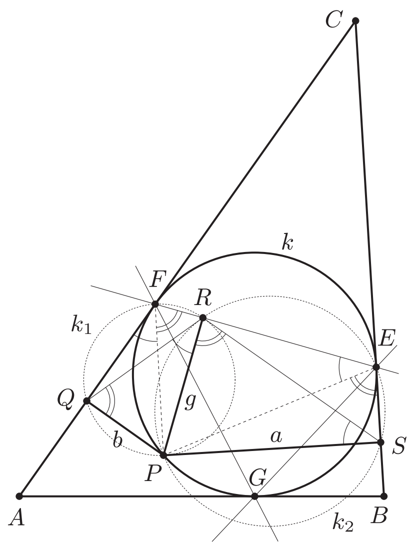
Megoldás. Elegendő belátnunk, hogy $g=\sqrt{ab}$, amiből már hasonlóan következik, hogy $e=\sqrt{bc}$ és $f=\sqrt{ac}$, és ezek szorzatából következik az állítás: $a\cdot b\cdot c=e\cdot f\cdot g$.



1. ábra

Legyenek a b, g, a távolságok talppontjai (*2. ábra*) Q, R és S. Azt fogjuk belátni, hogy a PQR és a PRS háromszögek hasonlóak. Ebből már következik az előbbi állítás.



2. ábra

A $PQFR$ és a $PRES$ négyszögek húrnégyszögek, mert két szemközti szögük derékszög. A köréjük írt körök legyenek k_1 és k_2, a beírt kört pedig jelöljük k-val. A $PRQ\sphericalangle=PFQ\sphericalangle$, mert a k_1 körben a PQ húrhoz tartozó kerületi szögek. A $PFQ\sphericalangle$ a k körben a PF húrhoz tartozó érintő szárú kerületi szög, így egyenlő a FEP kerületi szöggel. Ez utóbbi szög egyben a k_2 körben a PR húrhoz tartozó REP kerületi szög, így megegyezik az RSP szöggel. Tehát $PRQ\sphericalangle=RSP\sphericalangle$.

Hasonlóan belátható, hogy az ábrán kétívessel jelölt szögek is egyenlőek: a k_1 körben $PQR\sphericalangle=PFR\sphericalangle$, mivel a PR húrhoz tartozó kerületi szögek, a k körben $PFR\sphericalangle=PES\sphericalangle$, mert a PE húrhoz tartozó kerületi, illetve érintő szárú kerületi szögek, és a k_2 körben $PES\sphericalangle=PRS\sphericalangle$, mivel a PS húrhoz tartozó kerületi szögek. Tehát $PQR\sphericalangle=PRS\sphericalangle$. Ebből már következik, hogy a PQR és a PRS háromszögek hasonlóak, tehát

$$\frac{PQ}{PR}=\frac{PR}{PS},\quad\text{vagyis}\quad\frac{b}{g}=\frac{g}{a},\quad\text{amiből}\quad g=\sqrt{ab}\,.$$