

**Megoldás.** Egy, a feltételt kielégítő szám legyen  $n$ . Írjuk fel  $n$  prímtényezős felbontását:

$$n = 2^x 3^y p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

ahol  $x, y \geq 1$ , különben a 6-tal osztható osztók száma 0 lenne, ám az osztók száma sosem 0. Innen a 6-tal oszthatók száma:

$$x \cdot y \cdot (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1),$$

az összes osztók száma:

$$(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot (\alpha_1 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1).$$

A feladat feltételéből

$$2xy = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1) = (x + 1)(y + 1)(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1),$$

és innen  $2xy = (x+1)(y+1)$ . Elvégezve a kijelölt műveleteket, a következő diofantoszi egyenlethez jutunk:  $xy = x + y + 1$ . Oldjuk meg az egyenletet a szokásos módon:

$$x(y - 1) = y + 1,$$

$$x = \frac{y + 1}{y - 1} = \frac{y - 1 + 2}{y - 1} = 1 + \frac{2}{y - 1}.$$

Mivel  $x, y$  pozitív egészek,  $y - 1$  osztója 2-nek. Az osztók közül csak azokat kell figyelembe venni, melyekre  $x \geq 1$  lesz, azaz  $y - 1 = 1$  vagy  $y - 1 = 2$ . Az egyenlet megoldása a (3; 2) vagy a (2; 3) számpár. A feladat megoldását azok a  $72n$ , illetve  $108n$  alakú számok adják, amelyekre  $n$  sem 2-vel, sem 3-mal nem osztható.