I. megoldás. A kérdés ugyanaz, mintha azt kérdeznénk, hogy hányféleképpen lehet a 180-at három pozitív egész szám összegeként felírni, ha a számok sorrendje nem számít.

Ha számítana a sorrend is, akkor az összes lehetőség száma $\binom{179}{2}$ lenne, hiszen ha leírunk egymás mellé 180 darab 1-est, akkor a szomszédosak közötti 179 hely közül kell kettőt kiválasztani, hogy a 180 darab 1-est három részre osszuk.

Ha $a+b+c=180$, és a, b, c különböző pozitív egész számok, akkor ennek a három számnak $3!=6$-féle különböző sorrendje van. Tehát a különböző alakú, nem egyenlő szárú háromszögek számát x-szel jelölve, $6x$ darab ilyen háromszög van, ha számít a szögek sorrendje. Ha $a+a+b=180$, és a, b különböző pozitív egész számok, akkor ennek a három számnak 3-féle különböző sorrendje van. Tehát az egyenlő szárú, de nem egyenlő oldalú, különböző alakú háromszögek számát y-nal jelölve, $3y$ ilyen háromszög van, ha számít a szögek sorrendje. Egyenlő oldalú háromszög 1 van.

Ezek alapján:

$$\binom{179}{2}=\frac{179\cdot 178}{2}=15\,931=6x+3y+1. \tag{1}$$

Az egyenlő szárú, de nem egyenlő oldalú háromszögek száma pedig 88, hiszen az alapon fekvő szögek nagysága fokban az 1-től 89-ig terjedő egész számok közül a 60 kivételével bármi lehet. Tehát $y=88$. Ezt behelyettesítve (1)-be kapjuk, hogy $15\,931=6x+3\cdot 88+1$, ahonnan $x=2611$.

Így a különböző alakú háromszögek száma: $x+y+1=2611+88+1=2700$.

Megjegyzés. Ha azt szeretnénk megszámolni, hogy hányféleképpen lehet $6k$-t felbontani három pozitív egész szám összegére, akkor hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$\frac{(6k-1)(6k-2)}{2}=6x+3y+1, \quad \text{amiből} \quad 18k^2-9k=6x+3y,$$

ahol x a három különböző, y pedig a két különböző számra való felbontások számát jelöli. Másrészt szintén az I. megoldás gondolatmenetével: $3k-1=y+1$, amiből $y=3k-2$. Ezt behelyettesítve az előbbi egyenletbe és rendezve kapjuk, hogy $x=3k^2-3k+1$. Végül, a keresett felbontások száma:

$$x+y+1=3k^2-3k+1+3k-2+1=3k^2.$$

II. megoldás. Legyenek egy háromszög szögei általában $\alpha\le\beta\le\gamma$. Számoljuk össze a háromszögeket a legkisebb szög, α nagysága szerint. (A „fok” mértékegységet nem írjuk le.)

Tudjuk, hogy $\alpha\le\beta\le\left[90-\frac{\alpha}{2}\right]$, hiszen ha β ennél nagyobb lenne, akkor γ is, de ekkor a három szög összege nagyobb lenne 180-nál.

Tehát adott $\alpha=k$ esetén a háromszögben β nagyságára $\left(\left[90-\frac{k}{2}\right]-k\right)+1$ lehetőség van. Mivel α legfeljebb 60, azért az összes háromszög száma:

$$\sum_{\alpha=1}^{60}\left(\left[90-\frac{\alpha}{2}\right]-\alpha\right)+1=\left(\sum_{\alpha=1}^{60}\left[90-\frac{\alpha}{2}\right]\right)-\sum_{\alpha=1}^{60}\alpha+60=$$

$$=2\cdot(89+88+\ldots+60)-(1+2+\ldots+60)+60=2\cdot\frac{30\cdot 149}{2}-\frac{61\cdot 60}{2}+60=$$

$$=4470-1830+60=2700.$$

III. megoldás. Legyenek egy háromszög szögei általában $\alpha\le\beta\le\gamma$. Számoljuk össze a háromszögeket a középső szög, β nagysága szerint. (A „fok” mértékegységet nem írjuk le.)

β legalább 1, és legfeljebb $\left[\frac{180-1}{2}\right]=89$.

I. eset: $1\le\beta\le 60$, ekkor $1\le\alpha\le\beta$, amiből γ már meghatározott. Ez α-ra, és így a háromszögek számára

$$\sum_{\beta=1}^{60}\beta=1+2+\ldots+59+60=\frac{60(60+1)}{2}=1830$$

lehetőség.

II. eset: $61\le\beta\le 89$, ekkor $\beta\le\gamma\le 180-(\beta+1)$, hiszen α értéke legalább 1. Mivel α ebből már meghatározott, azért γ és így a háromszögek száma

$$\sum_{\beta=61}^{89}\big(\big(180-(\beta+1)\big)-\beta\big)+1=\sum_{\beta=61}^{89}180-2\beta=$$

$$=(89-61+1)\cdot 180-2\cdot\frac{(89-61+1)\cdot(89+61)}{2}=5220-4350=870.$$

Ez összesen $1830+870=2700$ lehetőség, tehát ennyi háromszög van.

Megjegyzés. A legnagyobb szög szerint is össze lehet számolni a háromszögeket, bár kicsit bonyolultabb módon.

IV. megoldás. Jelölje a_i, b_i és c_i rendre azt, hogy hányféleképpen lehet az i pozitív egész számot egy, két, illetve három pozitív egész szám összegére felbontani, ahol nem számít a tagok sorrendje.

Nyilván $a_i=1$ minden i esetén.

Az is teljesül, hogy $b_{2k}=b_{2k+1}=k$, hiszen a kisebbik szám mindkét esetben 1 és k közötti egész.

Ha egy 3-nál nagyobb számot felbontunk három pozitív egész összegére: $k=x+y+z$, akkor $k-3=(x-1)+(y-1)+(z-1)$, ahol a három tag nemnegatív. Vagyis a 3-mal kisebb számnak egy olyan felbontását kaptuk, ami vagy egy tagból áll (ha x, y és z közül pontosan kettő értéke 1); vagy két tagból áll (ha a három szám közül pontosan egy értéke 1); vagy három tagból áll (ha mindhárom szám értéke nagyobb 1-nél).

Megfordítva: a $k-3$ számnak valamely egy-, két- vagy háromtagú felbontásából megkapjuk k egy háromtagú felbontását.

A fentiek alapján teljesül, hogy:

$$c_k=a_{k-3}+b_{k-3}+c_{k-3}.$$

Legyen most $k=6n$ alakú. Ekkor c_{6n-3}-at tovább bontva, majd az eredményben a c_i tagokat mindig tovább bontva kapjuk, hogy

$$c_{6n}=a_{6n-3}+b_{6n-3}+a_{6n-6}+b_{6n-6}+\ldots+a_6+b_6+a_3+b_3+c_3.$$

Mivel a 3 csak egyféleképpen bontható fel három pozitív egész szám összegére ($3=1+1+1$), $c_3=1$. Továbbá $b_3=1$, $b_{6k}=3k$ és $b_{6k+3}=3k+1$. Ezek alapján a tagokat rendezve:

$$\begin{aligned}
c_{6n}&=(a_3+a_6+\ldots+a_{6n-6}+a_{6n-3})+(b_3+b_6+\ldots+b_{6n-6}+b_{6n-3})+c_3=\\
&=(2n-1)+\big((1)+(3\cdot 1)+(3\cdot 1+1)+(3\cdot 2)+(3\cdot 2+1)+\ldots+\\
&\quad+\big(3\cdot(n-1)\big)+\big(3\cdot(n-1)+1\big)\big)+1=\\
&=(2n-1)+\Big(n\cdot 1+2\cdot 3\cdot\big(1+2+\ldots+(n-1)\big)\Big)+1=\\
&=2n-1+n+6\cdot\frac{n(n-1)}{2}+1=3n+3n(n-1)=3n^2.
\end{aligned}$$

Ez $n=30$ esetén $3\cdot 30^2=2700$ felbontást jelent, ennyi a megfelelő háromszögek száma.