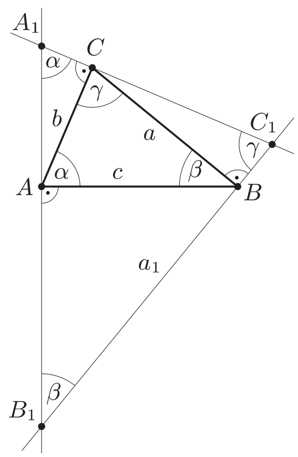
Megoldás. Három esetet kell vizsgálnunk: a hegyesszögű, a derékszögű és a tompaszögű háromszög esetét. Jelöljük az új háromszög csúcsait A_1, B_1 és C_1-gyel.

Az $A_1B_1C_1$ háromszög mindhárom esetben hasonló az eredeti ABC háromszöghöz, mert szögeik egyenlőek (merőleges szárú szögpárok). Legyen a két háromszög hasonlóságának aránya λ.

1. Ha a háromszög hegyesszögű (*1. ábra*):

$$\lambda = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{a_1}{a} = \frac{K}{k}, \qquad a_1 = B_1B + BC_1,$$

a BCC_1 háromszögben $\operatorname{ctg}\gamma = \dfrac{BC_1}{a}$, az ABB_1 háromszögben $\sin\beta = \dfrac{c}{BB_1}$.



1. ábra

Ezek alapján:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{B_1B}{a} + \frac{BC_1}{a} = \frac{c}{a\cdot\sin\beta} + \operatorname{ctg}\gamma.$$

A szinusztétel alapján az első tag:

$$\frac{c}{a}\cdot\frac{1}{\sin\beta} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{\sin\beta} = \frac{\sin\left[180^\circ - (\alpha+\beta)\right]}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} =$$

$$= \frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha,$$

vagyis

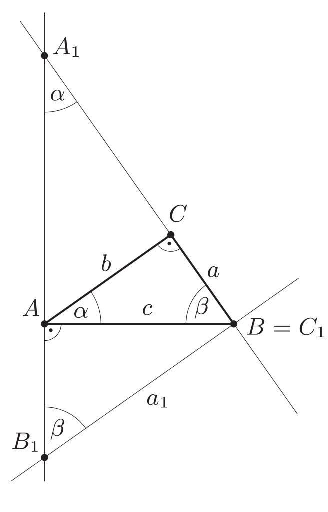
$$\frac{a_1}{a} = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{K}{k}.$$

2. Derékszögű háromszögben (*2. ábra*):

$$\lambda = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{a_1}{a} = \frac{K}{k},$$

az ABB_1 háromszögben

$$\sin\beta = \frac{c}{a_1}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{a_1}{a} = \frac{c}{a\cdot\sin\beta}.$$



2. ábra

Az előző esethez hasonlóan belátható, hogy

$$\frac{c}{a \cdot \sin\beta} = \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha.$$

Mivel $\gamma = 90°$, azért $\operatorname{ctg}\gamma = 0$, így

$$\frac{a_1}{a} = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{K}{k}.$$

3. Tompaszögű háromszögben (*3. ábra*):

$$\lambda = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{a_1}{a} = \frac{K}{k}, \quad a_1 = B_1B - BC_1,$$

az ABB_1 háromszögben $\sin\beta = \dfrac{c}{B_1B}$, a BCC_1 háromszögben

$$\operatorname{ctg}(180° - \gamma) = \frac{BC_1}{a} = -\operatorname{ctg}\gamma,$$

amiből

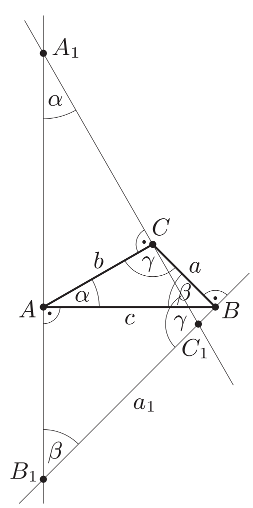
$$\frac{a_1}{a} = \frac{B_1B}{a} - \frac{BC_1}{a} = \frac{c}{a \cdot \sin\beta} - \operatorname{ctg}(180° - \gamma).$$

Hasonlóan az 1. esethez:

$$\frac{c}{a \cdot \sin\beta} = \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha,$$

vagyis összegezve

$$\frac{a_1}{a} = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{K}{k}.$$



3. ábra

Az állítást mindhárom esetben beláttuk, így az bármely háromszögben igaz.