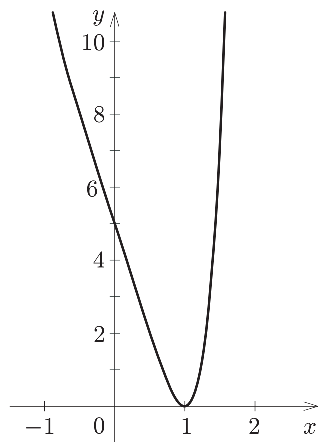
I. megoldás. Ábrázoljuk az $f(x) = x^6 - 6x + 5$ függvényt számítógépes program segítségével.

Az *ábra* alapján sejthető, hogy a függvénynek az $x = 1$ helyen van gyöke, esetleg többszörös gyöke. Nézzük meg a függvény értékét az $x = 1$ helyen: $f(1) = 0$. Az egyenletnek $x = 1$ valóban gyöke, így a polinomból kiemelhetünk $(x-1)$-et:

$$f(x) = x^6 - 6x + 5 = \\ = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 5).$$



Ha a második tényezőben x helyére 1-et írunk, ismét 0-t kapunk. Tehát újból kiemelhető $x - 1$:

$$f(x) = (x-1)^2(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5).$$

Itt az utolsó tényező már nem ad 0-t az $x = 1$ helyen. Az ábra alapján azt sejtjük, hogy több gyök nincs. Ha belátjuk, hogy az utolsó tényező mindig pozitív, akkor azzal bebizonyítjuk, hogy valóban nincs több gyöke az egyenletnek.

$x^4 + 2x^3$ hasonlít $x^2 + x$ négyzetére: $(x^2 + x)^2 = x^4 + 2x^3 + x^2$. Marad még $2x^2 + 4x + 5$, amiről könnyen látszik, hogy átalakítható:

$$2x^2 + 4x + 5 = 2(x^2 + 2x + 1) + 3 = 2(x+1)^2 + 3.$$

Azt kaptuk, hogy

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = (x^2 + x)^2 + 2(x+1)^2 + 3 \geq 3.$$

Ezzel beláttuk, hogy az egyenlet egyetlen gyöke az $x = 1$.

II. megoldás. Vegyük észre, hogy $x = 1$ megoldása az egyenletnek. Megmutatjuk, hogy ez az egyetlen gyök. Vizsgáljuk meg az $f(x) = x^6 - 6x + 5$ függvény deriváltfüggvényét. $f'(x) = 6x^5 - 6$. Ez csak $x = 1$ esetén 0. A deriváltfüggvény $x < 1$ esetén negatív és $x > 1$ esetén pozitív. Tehát $f(x)$ szigorúan monoton csökken, ha $x < 1$, $x = 1$ esetén értéke 0, és $x > 1$ esetén szigorúan monoton nő. Ebből következik, hogy $f(x) > 0$, ha $x \neq 1$.

Mivel a függvény csak az $x = 1$ helyen 0, így a polinomnak ez az egyetlen gyöke.

Megjegyzés. Többen helytelenül ekvivalens állításként értelmezték az első derivált 0 voltát és a szélsőérték létezését, pedig csak az igaz, hogy ha létezik szélsőérték, akkor ott a derivált 0.

III. megoldás. Az egyenletet átrendezve az $x^6 + 5 = 6x$ egyenlethez jutunk.

Ennek bal oldala $x \leq 0$ esetén legalább 5, míg a jobb oldal legfeljebb 0. Ebben az esetben tehát nincs gyöke az egyenletnek.

Osszuk el a kapott egyenlet mindkét oldalát 6-tal. A számtani és mértani közepek között fennálló egyenlőtlenséget felhasználva $x > 0$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\frac{x^6 + 5}{6} = \frac{x^6 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1}{6} \geq \sqrt[6]{x^6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = x,$$

ahol egyenlőség $x^6 = 1$, vagyis $x > 0$ miatt $x = 1$ esetén teljesül.

Az egyenlet egyetlen valós megoldása tehát $x = 1$.