

**I. megoldás.** Mivel az osztályzatok módusza 4,5, a 4,5 biztosan eleme az osztályzatok kettes terjedelmének. Így a feladat két esetre bontható: az osztályzatok 3-tól 5-ig terjednek, vagy 2,5-től 4,5-ig. Mivel 16-an írták meg a dolgozatot, a medián az osztályzatokat növekvő sorrendbe rendezve a két középső jegy számtani közepe lesz, így a feladat további két esetre bontható: a két középső osztályzat 4-es, vagy az egyik 3,5, a másik pedig 4,5. Így a feladat összesen négy esetre bontható.

Mivel a módusz 4,5, mindegyik esetben legalább négyszer fordul elő, hiszen egyébként legfeljebb  $5 \cdot 3 = 15$  diák írhatta volna a dolgozatot.

*I. eset.* Az osztályzatok 3-tól 5-ig terjednek, a két középső 4-es. Ebben az esetben egy 5-ös biztosan van. Az átlag annál rosszabb, minél több a rossz jegy, így ezt figyelembe véve a legrosszabb átlagot a következőképpen kaphatjuk:

3; 3; 3; 3; 3; 3,5; 3,5; 4; 4; 4,5; 4,5; 4,5; 4,5; 4,5; 4,5; 5

vagy

3; 3; 3; 3; 3,5; 3,5; 3,5; 4; 4; 4; 4,5; 4,5; 4,5; 4,5; 4,5; 5.

(Nem lehet kevesebb 4,5, mert akkor nem az lenne a módusz.)

Az átlag mindkét esetben  $\frac{62}{16} = 3,875$ .

*II. eset.* Az osztályzatok 3-tól 5-ig terjednek, a két középső jegy 3,5 és 4,5.

Ebben az esetben is biztosan van egy 5-ös, és így a legrosszabb átlagot adó osztályzatok:

3; 3; 3; 3; 3; 3; 3,5; 3,5; 4,5; 4,5; 4,5; 4,5; 4,5; 4,5; 4,5; 5.

(Nem lehet eggyel több 3-as, hiszen akkor nem 4,5 lenne a módusz.)

Az átlag  $\frac{61,5}{16} = 3,84375$ .

*III. eset.* Az osztályzatok 2,5-től 4,5-ig terjednek, a két középső 4-es. A legrosszabb átlagot adó jegyek:

2,5; 2,5; 2,5; 2,5; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4,5; 4,5; 4,5; 4,5; 4,5.

(Se 2,5, se 4 nem lehet több.)

Ekkor az átlag  $\frac{57,5}{16} = 3,59375$ .

*IV. eset.* Az osztályzatok 2,5-től 4,5-ig terjednek, a két középső a 3,5 és a 4,5. A legrosszabb átlagot adó jegyek:

2,5; 2,5; 2,5; 2,5; 2,5; 2,5; 2,5; 3,5; 4,5; 4,5; 4,5; 4,5; 4,5; 4,5; 4,5; 4,5.

Az átlaguk  $\frac{57}{16} = 3,5625$ .

Ezek alapján az összes lehetőség közül a legrosszabb átlag a IV. esetben van. Ekkor nincs ötös osztályzat, ezért Pisti azt válaszolta, hogy nem kaphatott ötöst a dolgozatára.

**II. megoldás.** Bebizonyítjuk, hogy minden mintához, amelynél van a jegyek között jeles, hozzárendelhető egy másik minta, amelyben nincs jeles, és az átlaga kisebb. Ha van 5-ös, akkor lennie kell 3-asnak a mintában, mert a terjedelem 2. Egy 3-ast cseréljünk ki 2/3-adra, és az összes 5-öst 4/5-re: így a terjedelem és a medián nem változik, és a módusz is marad 4/5. A jegyek összege biztosan csökkent, tehát az átlag is. Így a legkisebb átlagú minta biztosan nem tartalmaz 5-öst, tehát Pisti válasza nemleges volt.

*Megjegyzés.* Sokan nem indokolták, hogy miért nincs 5-ös osztályzat a legrosszabb esetben. Többen úgy gondolták, ha találtak egy 2,5–4,5 közötti megoldást, akkor egy 5-öst tartalmazó eset átlaga ennél nem lehet kisebb. Ez igaz, de egyáltalán nem nyilvánvaló.