1.1. A z magasságban levő, $\varrho(z)$ sűrűségű, A területű, dz vastagságú levegőréteg $A\varrho(z)g\,dz$ súlya megegyezik a levegőréteg alján és tetején mérhető nyomáskülönbségből származó $-A\big(p(z+dz)-p(z)\big)$ erővel. Felhasználva, hogy $\varrho=\dfrac{\mu p}{RT_0}$, a nyomás magasságtól való függésére a

$$p'(z)=-\frac{\mu g}{RT_0}p(z)$$

differenciálegyenletet kapjuk, melynek megoldása

$$p(z)=p_0e^{-\frac{\mu g}{RT_0}z}.$$

1.2. Az előzőekhez hasonló érveléssel most a $p(z)$ függvényre a

$$p'(z)=-\frac{\mu g}{R\big(T(0)-\Lambda z\big)}p(z)$$

(ún. szeparálható) differenciálegyenlet vezethető le, mely a feladatban közölt segítséggel megoldható:

$$\int\frac{dp}{p}=\ln p+C_1;\qquad -\frac{\mu g}{R}\int\frac{dz}{T(0)-\Lambda z}=\frac{\mu g}{R\Lambda}\ln\big(T(0)-\Lambda z\big)+C_2,$$

ahonnan

$$p(z)=p_0\left(1-\frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{R\Lambda}}.$$

A sűrűség magasságtól való függése:

$$\varrho(z)=\frac{\mu p(z)}{RT(z)}=\frac{\mu p_0}{RT(0)}\left(1-\frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{R\Lambda}-1},$$

ami akkor monoton növekedő függvény, ha a kitevő negatív, azaz ha

$$\Lambda>\frac{\mu g}{R}=0{,}034\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}.$$

Érdemes észrevenni, hogy kis magasságok esetén a nyomás magasságfüggése mind az 1. pontban vizsgált izoterm légkör esetén, mind pedig a most vizsgált lineáris hőmérséklet-eloszlás esetén $p(z)\approx p_0\left(1-\dfrac{\mu gz}{RT(0)}\right)$ alakú. Tehát a légkör hőmérsékletének magassággal való változása „első rendben”, kis magasságok esetén nem befolyásolja a nyomás magasságtól való függését.

2.1. A levegőcsomag állapotváltozása adiabatikus, tehát kielégíti a

$$T_{\text{csomag}}\cdot p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}=\text{állandó}$$

állapotegyenletet, ahol $T_{\text{csomag}}(z)$ a levegőcsomag hőmérséklete, $p(z)$ pedig a környezet és a levegőcsomag közös nyomása. Mindkét mennyiség függ a z magasságtól. Differenciáljuk az adiabatikus állapotegyenletet z szerint:

$$T'_{\text{csomag}}\cdot p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}+T_{\text{csomag}}\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma}\cdot p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\cdot\frac{p'}{p}=0.$$

Az előző pontban láttuk, hogy $\dfrac{p'}{p}=-\dfrac{\mu g}{RT}$, ezt felhasználva kapjuk, hogy:

(8) $$T'_{\text{csomag}}=-G,\quad \text{ahol}\quad G=\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu g}{R}\frac{T_{\text{csomag}}}{T}.$$

2.2. Ha $T_{\text{csomag}}=T$, akkor

$$\Gamma=G|_{T_{\text{csomag}}=T}=\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu g}{R}=\frac{\mu g}{c_p}=10^{-2}\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}},$$

és a hőmérséklet a $T(z)=T(0)-\Gamma z$ módon függ a magasságtól. (Ezt a speciális esetet *adiabatikus légkörnek* hívják.)

2.3. Ha a külső hőmérséklet $T(z)=T(0)-\Lambda z$ függvény szerint változik, akkor az (8) összefüggés szerint a $T_{\text{csomag}}(z)$ függvény a következő differenciálegyenletet elégíti ki:

$$T'_{\text{csomag}}(z)=-\frac{\Gamma}{T-\Lambda z}T_{\text{csomag}}(z).$$

Az 1.2. pontban már megoldottunk egy hasonló differenciálegyenletet ($p(z)$-re, más konstanssal), így mostani egyenletünk megoldását a megfelelő változók átírásával azonnal megkaphatjuk:

$$T_{\text{csomag}}(z) = T_{\text{csomag}}(0)\left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\Gamma}{\Lambda}} \approx T_{\text{csomag}}(0) - \Gamma z. \tag{9}$$

Az utolsó közelítés $|\Lambda z| \ll T(0) \approx T_{\text{csomag}}(0)$ esetén érvényes, amikor a hatványozás közelítésére használhatjuk az $(1+\varepsilon)^{\alpha} \approx 1 + \alpha\varepsilon$ formulát, amely $\varepsilon \ll 1$ esetén érvényes.

Érdemes észrevenni, hogy a kapott hőmérsékletfüggés megegyezik az adiabatikus légkör esetén kapottal. Ezen nem kell meglepődnünk, ha visszaemlékezünk az 1.2. pont végén kapott eredményünkre, mely szerint a külső nyomás (kis magasságok esetén, „első rendben") érzéketlen a hőmérsélket magasságfüggésére, a külső hőmérséklet pedig (feltevéseink szerint) nem befolyásolja a levegőcsomag hőmérsékletét.

3.1. A levegőcsomag és a külső levegő nyomása egyensúlyban van, tehát csak hőmérsékletük eltérése okozhat sűrűségkülönbséget. Ha $z > 0$ esetén a külső levegő

$$T(z) = T(0) - \Lambda z$$

hőmérséklete kisebb, mint a levegőcsomag

$$T_{\text{csomag}}(z) = T(0) - \Gamma z$$

hőmérséklete, azaz ha $\Lambda > \Gamma$, akkor a kissé felemelkedett levegőcsomag ritkább, mint környezete, tehát tovább emelkedik; a légkör instabil. $\Lambda = \Gamma$ esetén a légkör semleges, míg $\Lambda < \Gamma$ esetén stabil.

3.2. A levegőcsomag addig a h magasságig emelkedik, ahol hőmérséklete megegyezik a külső levegő hőmérsékletével, tehát, felhasználva a (9) egyenletet,

$$T(0) - \Lambda h = T_{\text{csomag}}(0)\left(1 - \frac{\Lambda h}{T(0)}\right)^{\frac{\Gamma}{\Lambda}}.$$

Innen a h magasságra azt kapjuk, hogy:

$$h = \frac{T(0)}{\Lambda}\left(1 - \left(\frac{T(0)}{T_{\text{csomag}}(0)}\right)^{\frac{\Lambda}{\Gamma - \Lambda}}\right) \approx \frac{T_{\text{csomag}}(0) - T(0)}{\Gamma - \Lambda}. \tag{10}$$

Az utolsó közelítés a

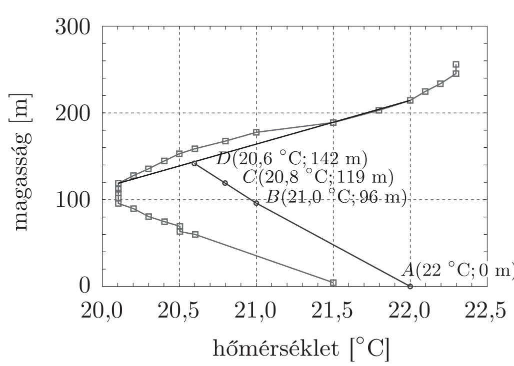
$$T_{\text{csomag}}(0) \approx T(0) \quad \text{és} \quad \frac{T_{\text{csomag}}(0) - T(0)}{T_{\text{csomag}}(0)} \ll 1$$

feltételek mellett érvényes, és a

$$\frac{T(0)}{T_{\text{csomag}}(0)} = 1 - \frac{T_{\text{csomag}}(0) - T(0)}{T_{\text{csomag}}(0)}$$

átírás után a hatványozás már megismert közelítésével kapható.

4.1. A *táblázatból* vett adatokat ábrázolva a következő *grafikont* kapjuk:



6. ábra. A légkör hőmérséklete a magasság függvényében

Ennek megfelelően a légkör három rétegre osztható, a középső réteg izoterm, míg a másik kettőben közel lineárisan változik a hőmérséklet:

1. réteg	$0\ \text{m} < z < 96\ \text{m}$	$\Lambda_1 = \dfrac{21{,}5\ \text{K} - 20{,}1\ \text{K}}{91\ \text{m}} = 15{,}4 \cdot 10^{-3}\ \dfrac{\text{K}}{\text{m}}$
2. réteg	$96\ \text{m} < z < 119\ \text{m}$	$\Lambda_2 = 0\ \dfrac{\text{K}}{\text{m}}$, izoterm szakasz
3. réteg	$119\ \text{m} < z < 215\ \text{m}$	$\Lambda_3 = \dfrac{20{,}1\ \text{K} - 22\ \text{K}}{215\ \text{m} - 119\ \text{m}} = -0{,}02\ \dfrac{\text{K}}{\text{m}}$

Látható, hogy a (9) egyenlet közelítésénél használt feltételek teljesülnek, így a felemelkedő, és adiabatikusan táguló levegőcsomag hőmérséklete a külső hőmérséklettől lényegében teljesen függetlenül a $\Gamma = 10^{-2}\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}$ együttható szerint lineárisan csökken. Így

$$T_{\text{csomag}}(96\ \mathrm{m}) = 22\ ^\circ\mathrm{C} - 0{,}96\ ^\circ\mathrm{C} \approx 21{,}0\ ^\circ\mathrm{C} \quad \text{és}$$
$$T_{\text{csomag}}(119\ \mathrm{m}) = 22\ ^\circ\mathrm{C} - 1{,}19\ ^\circ\mathrm{C} \approx 20{,}8\ ^\circ\mathrm{C}.$$

4.2. Látható, hogy 119 m magasan a levegőcsomag hőmérséklete még mindig 0,7 °C-kal magasabb, mint környezetéé. Alkalmazva a (10) egyenlet közelítő formuláját, azt kapjuk, hogy a levegőcsomag még további $\frac{0{,}7}{0{,}01+0{,}02}\ \mathrm{m} =$ 23 m-t emelkedik, mire környezetével hőmérsékleti egyensúlyba kerül. Tehát a keverési magasság

$$H = 119\ \mathrm{m} + 23\ \mathrm{m} = 142\ \mathrm{m},$$

és itt a hőmérséklet $T_{\text{csomag}}(H) \approx 20{,}6\ ^\circ\mathrm{C}$.

5.1. Az $L \times W \times H$ méretű téglatestben levő teljes szén-monoxid mennyiség két tényező miatt változik: egyrészt a motorok által kibocsátott mennyiséggel nő, másrészt a szél által kifújt mennyiséggel csökken. Tehát

$$LWHC'(t) = M - uLHC(t).$$

5.2. A fenti lineáris elsőrendű differenciálegyenletnek a $C(0) = 0$ kezdőfeltételt kielégítő megoldása:

$$C(t) = \frac{M}{LHu}\left(1 - e^{-\frac{u}{W}t}\right).$$

5.3. A fenti egyenletbe behelyettesítve a megadott adatokat, azt kapjuk, hogy a 8 órakor mérhető szén-monoxid koncentráció $C(3600\ \mathrm{s}) = 2{,}3\ \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{m}^3}$.