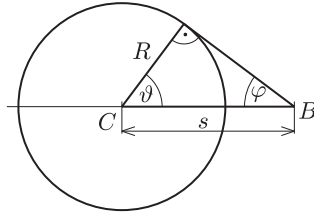


Mialatt a részecske t idő alatt a C pontból $s = vt = t\beta c$ utat megtéve a B pontba ér, a C pontban kibocsátott fény egy $R = t\frac{c}{n}$ sugarú gömböt ér el.

Így a hullámfront a B -ből a gömbhöz húzott érintő kúp, amely

$$\varphi = \arcsin \frac{R}{s} = \arcsin \frac{1}{\beta n}$$

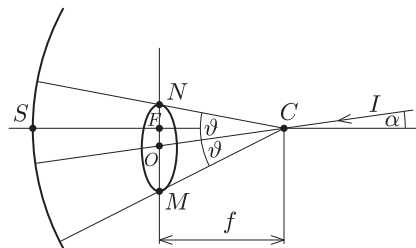
szöget zár be a részecske pályájával.



4. ábra. A hullámfront szerkesztése

Adott irányból párhuzamosan érkező fénysugarakat a homorú gömbtükör a fókuszskába képzi. A kép pontos helyét a tükör C geometriai középpontján áthaladó sugármenet metszi ki, amely visszaverődés után szintén keresztülhalad C -n.

Az 5. ábrán felrajzoltuk az optikai tengelyhez képest α , $\alpha + \vartheta$ és $\alpha - \vartheta$ szögben haladó C -n átmenő fénysugarakat, melyek a fókuszskát az O , M és N pontban metszik. A tükör által alkotott kép (kis α , ϑ szögek esetén) egy $r = OM = ON = f\vartheta$ sugarú kör, melynek O középpontja $OF = f\alpha$ távolságra esik az F fókuszponttól.



5. ábra. A gyűrűs kép létrejötte

3.1. A $p = \frac{Mv}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (relativisztikus) impulzus képletéből az M nyugalmi tömeg ismeretében kifejezhető a részecske $\beta = \frac{v}{c}$ dimenziótlan sebessége:

$$(1) \quad \beta = \left(1 + \left(\frac{Mc^2}{pc}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \delta, \quad \text{ahol} \quad \delta = \frac{1}{2} \left(\frac{Mc^2}{pc}\right)^2.$$

Az utolsó közelítés akkor érvényes, ha $\delta \ll 1$. Ez esetünkben jó közelítéssel fennáll mindhárom részecskére:

$$(2) \quad \delta_p = 4,42 \cdot 10^{-3}, \quad \delta_\kappa = 1,25 \cdot 10^{-3}, \quad \delta_\pi = 9,8 \cdot 10^{-5}.$$

A Cserenkov-effektus akkor lép fel, ha a részecske v sebessége nagyobb a közegbeli $\frac{c}{n}$ fénysebességnél, ahol n a törésmutatót jelöli. Határesetben $v = \frac{c}{n_{\min}}$, tehát a minimális törésmutató, amely mellett megfigyelhető a Cserenkov-effektus:

$$n_{\min} = \frac{1}{\beta} = \sqrt{1 + \left(\frac{Mc^2}{pc}\right)^2} \approx 1 + \delta.$$

A törésmutató ismeretében a kritikus nyomás $P_{\min} = \frac{n_{\min} - 1}{a} = \frac{\delta}{a}$. A számszerű eredmények:

$$P_{\min, \text{ proton}} = 16 \text{ atm}, \quad P_{\min, \text{ kaon}} = 4,6 \text{ atm}, \quad P_{\min, \text{ pion}} = 0,36 \text{ atm}.$$

3.2. A gyűrűk sugara $r = f\vartheta$, ahol a sugárzási kúp ϑ félnyílásszögére a 4. ábra alapján a $\cos \vartheta = \frac{1}{n\beta}$ egyenlőség teljesül. Most azt az $n_{\frac{1}{2}}$ törésmutatót keressük, amely mellett $2r_\kappa = r_\pi$, azaz $2\vartheta_\kappa = \vartheta_\pi$. Ezek felhasználásával

$$\frac{1}{n_{\frac{1}{2}}\beta_\pi} = \cos \vartheta_\pi = \cos(2\vartheta_\kappa) = 2\cos^2 \vartheta_\kappa - 1 = \frac{2}{n_{\frac{1}{2}}^2\beta_\kappa^2} - 1.$$

Az egyenlőségsor első és utolsó eleme a

$$(3) \quad \beta_\pi \beta_\kappa^2 n_{\frac{1}{2}}^2 + \beta_\kappa^2 n_{\frac{1}{2}} - 2\beta_\pi = 0$$

másodfokú egyenletet adja a keresett $n_{\frac{1}{2}}$ törésmutatóra, mely egyszerűen linearizálható, ha észrevesszük, hogy mind $n_{\frac{1}{2}}$, mind β_π és β_κ nagyon kicsit tér el 1-től:

$$(4) \quad \beta_\pi \approx 1 - \delta_\pi, \quad \beta_\kappa \approx 1 - \delta_\kappa, \quad n_{\frac{1}{2}} = 1 + \eta.$$

Ezeket a közelítéseket (3)-ba beírva, és csak az elsőrendű tagokat tartva meg, az adódik, hogy:

$$\eta = \frac{4\delta_\kappa - \delta_\pi}{3} = 1,634 \cdot 10^{-3} \quad \text{és} \quad P_{\frac{1}{2}} = \frac{\eta}{a} = 6,05 \text{ atm.}$$

Ezen a nyomáson a protonok nem keltenek Cserenkov-sugárzást. A törésmutató ismeretében meghatározható a kaonok és pionok által keltett sugárzási kúp félnyílásszöge:

$$(5) \quad \vartheta_\kappa = \arccos\left(\frac{1}{n_{\frac{1}{2}}\beta_\kappa}\right) \approx \sqrt{2(\eta - \delta_\kappa)} = 2,77 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 1,6^\circ,$$

$$\vartheta_\pi = 2\vartheta_\kappa = 5,54 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 3,2^\circ.$$

(Ismert, hogy $x \ll 1$ esetén $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. Innen $\arccos(1 - y) \approx \sqrt{2y}$, ahol $y = \frac{x^2}{2} \ll 1$. A közelítésnél ezt az összefüggést, valamint a (4) egyenleteket használtuk fel.)

4.1. Az (1) és (5) egyenletek alapján a ϑ félnyílásszög a p impulzus függvényében

$$(6) \quad \vartheta(p) \approx \sqrt{2\eta - \left(\frac{Mc^2}{pc}\right)^2}, \quad \text{így} \quad \frac{d\vartheta}{dp} \approx \frac{(Mc^2)^2}{\vartheta \cdot (pc)^3} c.$$

A számértékek behelyettesítése után azt kapjuk, hogy:

$$(7) \quad \frac{d\vartheta_\kappa}{dp} = \frac{9,03 \cdot 10^{-3} \cdot c}{\text{GeV}} = \frac{0,52^\circ \cdot c}{\text{GeV}}, \quad \frac{d\vartheta_\pi}{dp} = \frac{3,54 \cdot 10^{-4} \cdot c}{\text{GeV}} = \frac{0,02^\circ \cdot c}{\text{GeV}}.$$

(A részecskefizikában az impulzus megadására gyakran használják az $\frac{\text{elektronvolt}}{\text{fénysebesség}}$ mértékegységet.)

4.2. A feltételekből az impulzus bizonytalansága:

$$\Delta p < \frac{\vartheta_\pi - \vartheta_\kappa}{10(\vartheta'_\kappa + \vartheta'_\pi)} = 0,3 \frac{\text{GeV}}{c}.$$

5. Adott n törésmutatójú közegben Cserenkov-sugárzás a $v_{\min} = \frac{c}{n}$ sebesség fölött észlelhető. Ennél a sebességnél a mozgási energia:

$$T_{\min} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{\min}^2}{c^2}}} - Mc^2 = Mc^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right) = 0,51 \cdot Mc^2.$$

α -részecskékre, illetve elektronokra ezek az értékek

$$T_\alpha = 0,51 \cdot 3,8 \text{ GeV} = 1,94 \text{ GeV}, \quad T_\beta = 0,51 \cdot 0,51 \text{ MeV} = 0,26 \text{ MeV},$$

ami azt jelenti, hogy elektronok hozták létre a Cserenkov által észlelt sugárzást.

6.1. P nyomáson $\eta = n - 1 = aP$, tehát a látható tartomány két végpontjához tartozó törésmutatók eltérése $\Delta n = \Delta \eta = 0,02 \cdot aP = 3,24 \cdot 10^{-5}$. A keresett $\Delta \vartheta$ szögeltérés a (6) egyenletben felírt ϑ szög η változó szerinti differenciálásával kapható meg:

$$\Delta \vartheta_\pi = \frac{d\vartheta_\pi(\eta)}{d\eta} \Delta \eta = \frac{\Delta \eta}{\vartheta_\pi} = 0,033^\circ.$$

6.2. Az előző pontban láttuk, hogy a diszperzió miatti kiszélesedés félértékszélessége $\frac{\Delta \vartheta_\pi}{2} = 0,017^\circ$. A (7) egyenlet alapján az impulzus-inhomogenitás miatti kiszélesedés

$$\frac{0,02^\circ \cdot c}{\text{GeV}} \cdot \frac{0,3 \text{ GeV}}{c} = 0,006^\circ,$$

ami háromszor kisebb a diszperzióhoz tartozó kiszélesedésnél. Kisebb hullámhosszon a törésmutató nagyobb, tehát a Cserenkov-kúp nyílásszöge szélesebb. Ez azt jelenti, hogy a gyűrű színe kívül kék, középen fehér, belül pedig vörös.