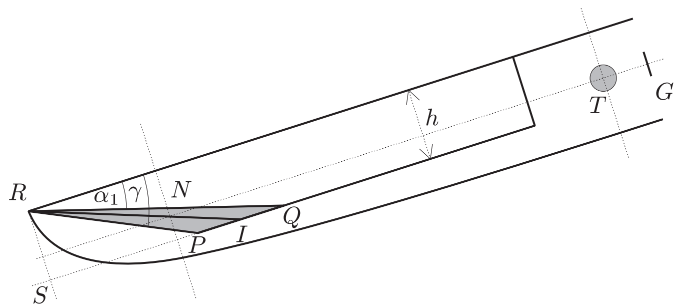
1. *A mozsár felépítése*

1.1. *A TG távolság kiszámítása.* A kanálban összegyűlt 1 liter víz forgatónyomatéka egyensúlyt tart az emelőrúd súlyából származó forgatónyomatékkal. Geometriai megfontolásokból kiszámíthatjuk, hogy 1 liter víz esetén a kanálban a vízmagasság 1,2 cm, és ennek a vízmennyiségnek a súlypontja nagyjából 47 cm-re van a T forgástengelytől. Mivel az emelőrúd tömege 30-szor nagyobb 1 liter víz tömegénél, így a kérdéses TG távolság

$$\frac{47}{30}\ \mathrm{cm} = 1{,}57\ \mathrm{cm} \approx 1{,}6\ \mathrm{cm}.$$

1.2. *Az α_1 és α_2 értékek kiszámítása.* Amikor az emelőrúd α_1 dőlésszögénél a víz eléri a kanál peremét, akkor az *1. ábrán* látható helyzetet veszi fel. Ekkor a kanálban lévő 1 liter víz egy háromszög alapú egyenes hasábot tölt ki, melynek térfogatát könnyen felírhatjuk: $V = \dfrac{hb(PQ)}{2} = 1$ liter, ahol $b = 15$ cm a kanál szélessége. A számítás $PQ \approx 11{,}1$ cm eredményre vezet.



1. ábra

Az emelőrúd α_1 dőlésszögét így számíthatjuk ki:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{h}{SQ} = \frac{h}{PQ + \sqrt{3}h},$$

amiből $\alpha_1 = 20{,}6^\circ$.

A kanálból akkor távozik az összes víz, ha az emelőrúd dőlésszöge: $\alpha_2 = \gamma = 30^\circ$.

1.3. *A nulla forgatónyomatékhoz tartozó β szög és m_1 víztömeg kiszámítása.* Használjuk újra az előző *ábrát,* és ahol csak lehet, írjuk be a képletekbe a numerikus értékeket. Jelöljük a PQ távolságot x-szel, amit mérjünk méterben: $PQ = x$ (m), amivel így adhatjuk meg a kanálban maradó víz m tömegét kilogrammban: $m = \varrho_{\text{víz}}\dfrac{xhb}{2} = 9x$ (kg). A víz súlypontja a PQR háromszög súlypontjában van, az RI súlyvonal $2/3$ részénél. A szerkezet geometriai elrendezéséből következik, hogy az emelőrúd G súlypontja, a T forgástengely (középpontja) és a kanálban maradó víz N súlypontja egy egyenes mentén helyezkedik el. A forgatónyomaték egyensúlyt így írhatjuk fel:

$$mg\cdot TN = Mg\cdot TG \Rightarrow m\cdot TN = M\cdot TG = 30\cdot 0{,}0157 = 0{,}471\ (\mathrm{kgm}).$$

A TN távolságot így írhatjuk fel:

$$TN = L + a - \frac{2}{3}\left(\sqrt{3}h + \frac{x}{2}\right) = 0{,}94 - 0{,}08\sqrt{3} - \frac{x}{3} = 0{,}801 - \frac{x}{3}.$$

Az eddig meghatározott három kifejezésből ($m = 9x$; $TN = 0{,}801 - \dfrac{x}{3}$; $m\cdot TN = 0{,}471$) a következő másodfokú egyenletre juthatunk: $3x^2 - 7{,}21 + 0{,}471 = 0$, melynek számunkra értelmes gyöke: $x = 0{,}0672$. Így a kérdéses tömeg: $m = 9x = 0{,}605$ kg, továbbá a dőlési szöget így határozhatjuk meg:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{x + \sqrt{3}h} = 0{,}436, \quad \text{amiből} \quad \beta = 23{,}6^\circ.$$

2. *A rendes munkavégző körfolyamat mennyiségei*

2.1. *A $\mu(\alpha)$ forgatónyomaték függvény ábrázolása az α szög függvényében.* Kezdetben ($\alpha = 0$) nincs víz a kanálban. Ekkor az emelőrúdra ható forgatónyomaték:

$$Mg\cdot TG = 30\cdot 9{,}81\cdot 0{,}0157 = 4{,}62\ \mathrm{Nm} \approx 4{,}6\ \mathrm{Nm}.$$

Tekintsük ezt a forgatónyomatékot negatív előjelűnek, a negatív forgatónyomaték a rúd dőlésszögét csökkenteni igyekszik. Amikor lassan víz folyik a kanálba, az eredő forgatónyomaték növekedni kezd egészen addig, amíg kissé pozitívvé válik, és a mozsártörő emelkedni kezd. Ezt követően azzal a közelítéssel dolgozunk, hogy a kanálban lévő víz mennyisége nem változik.

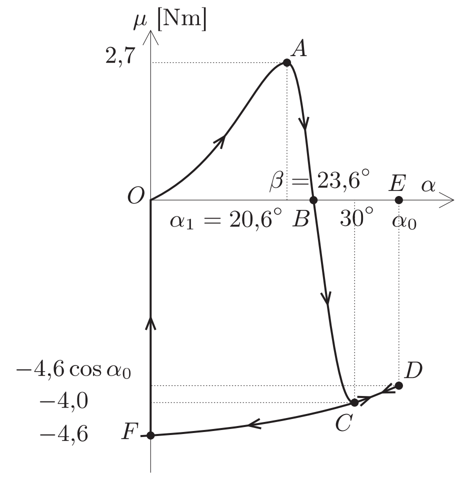
Miközben a kanál lefelé billen, a benne lévő víz tömegközéppontja fokozatosan eltávolodik a forgástengelytől, így μ egészen addig növekszik, amíg a víz eléri a kanál peremét. Tehát a maximális forgatónyomaték az $\alpha = \alpha_1 = 20{,}6^\circ$-os dőlésszögnél jön létre. Az előző részben már megismert számoláshoz hasonlóan kiszámíthatjuk, hogy $\mu_{\max} \approx 2{,}7$ Nm.

A rúd további dőlése közben a víz elkezd kifolyni a kanálból, és $\alpha = \beta$ esetén $\mu = 0$-vá válik. A tehetetlenség következtében α tovább növekszik, miközben μ csökken. $\alpha = 30^\circ$ esetén a kanál teljesen kiürül. Ebben a helyzetben a forgatónyomaték: $\mu = -Mg \cdot TG \cdot \cos 30^\circ = -4{,}0$ Nm. Ezután a tehetetlenség következtében a szög még tovább nő, egészen $\alpha = \alpha_0$ értékig, amikor a forgatónyomaték: $\mu = -Mg \cdot TG \cdot \cos\alpha_0 = -4{,}6 \cdot \cos\alpha_0$ Nm. Végül a dőlésszög hirtelen nullára csökken (a mozsártörő lecsap), és a körfolyamat $\mu = -4{,}6$ Nm értékkel újra kezdődik.

A fentiek alapján felvázolhatjuk a $\mu(\alpha)$ forgatónyomatékot az α szög függvényében (*2. ábra*):

2.2. *A mozsártörő munkavégzésének grafikus értelmezése.* A $\mu(\alpha)$ forgatónyomaték által végzett W_{teljes} teljes munkavégzést a forgatónyomaték előjeles görbe alatti területeként számíthatjuk ki a teljes $OABCDFO$ körfolyamatra. A mozsártörőnek átadott $W_{\text{ütés}}$ energiát az α_0-tól 0-ig tekintett görbe alatti terület mérőszámaként kaphatjuk meg ($EDFOE$), melynek nagysága:

$$Mg \cdot TG \cdot \sin\alpha_0 = 4{,}6 \text{ J} \cdot \sin\alpha_0.$$



2. ábra

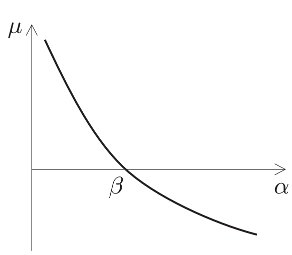
2.3. *Az α_0 szög és $W_{\text{ütés}}$ becslése.* Az α_0 szög értékét abból becsülhetjük meg, hogy ebben a pozícióban az emelőrúd energiája nulla, vagyis az $OABO$ terület megegyezik a $BEDCB$ terület nagyságával. Ha az $OABO$ területet háromszöggel, a $BEDCB$ területet pedig trapézzal közelítjük, akkor az α_0 szög értékére közelítőleg 35°-ot kapunk. Így a mozsártörő által végzett munka:

$$W_{\text{ütés}} = Mg \cdot TG \cdot \sin\alpha_0 = 4{,}6 \text{ J} \cdot \sin 35^\circ \approx 2{,}6 \text{ J}.$$

3. A mozdulatlan állapot

3.1. *Az emelőrúd mozgása az $\alpha = \beta$ egyensúlyi helyzet közelében.*

3.1.1. Az $\alpha = \beta$ egyensúlyi helyzet közelében a forgatónyomaték nagyjából a *3. ábrán* látható módon változik. A grafikon alapján megállapíthatjuk, hogy az egyensúlyi helyzet stabil.



3. ábra

3.1.2. Az α szögben megdőlt rúd esetén a kanálban lévő víz tömege:

$$m = \frac{\varrho b h \cdot PQ}{2}, \quad \text{ahol} \quad PQ = h\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ}\right).$$

Miközben a rúd hajlásszöge β-ról $(\beta + \Delta\alpha)$ értékre változik, a kanálban lévő víz tömegének megváltozása közelítőleg:

$$\Delta m = -\frac{bh^2\varrho}{2\sin^2\alpha}\Delta\alpha \approx -\frac{bh^2\varrho}{2\sin^2\beta}\Delta\alpha.$$

A $(\beta + \Delta\alpha)$ dőlésszögű rúdra ható μ forgatónyomaték megegyezik a Δm tömegből származó nyomatékkal:

$$\mu = \Delta mg \cdot TN \cdot \cos(\beta + \Delta\alpha).$$

A TN távolságot a rúd β szöghöz tartozó egyensúlyi állapotából határozhatjuk meg:

$$TN = \frac{M \cdot TG}{m} = \frac{30 \cdot 0{,}0157}{0{,}605} = 0{,}779 \text{ m}.$$

Végül a forgatónyomatékra közelítőleg ezt a numerikus kifejezést kapjuk: $\mu \approx -47 \cdot \Delta\alpha$ (Nm).

3.1.3. Alkalmazzuk a rúd mozgására a forgómozgás dinamikai alapegyenletét ($\mu = I\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$, ahol $\alpha = \beta + \Delta\alpha$), melyben az I tehetetlenségi nyomaték nem csupán a rúdtól, hanem a kanálban lévő víz tömegétől is függ. Tegyük fel, hogy kicsiny $\Delta\alpha$ szögek esetén a kanálban lévő víz tömege állandó ($\approx$ 0,6 kg) és ezt a vízmennyiséget tekintsük tömegpontnak. A számítás a rendszer tehetetlenségi nyomatékára közelítőleg $I \approx 12{,}4$ kg m^2-et ad. Így a mozgásegyenlet numerikus alakja (SI egységrendszerben):

$$-47 \cdot \Delta\alpha = 12{,}4\frac{d^2\Delta\alpha}{dt^2},$$

ami egy harmonikus rezgőmozgás egyenlete. A mozgás rezgésideje:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{12{,}4}{47}} \approx 3{,}2 \text{ s}.$$

3.2. *A vízhozam számítása kis amplitúdójú rezgés esetén.* Az emelőrúd szögkitérésének időfüggését így írhatjuk fel az egyensúlyi helyzet körül:

$$\Delta\alpha = -\Delta\alpha_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right), \quad \text{ahol} \quad \Delta\alpha_0 = 1^\circ.$$

Ilyenkor a rúd a $t = 0$ kezdőpillanat után a kisebb szögkitérések felé indul el, és ott nagyobb vízmennyiségre van szükség a túlfolyás elérésére. Rövid dt idő alatt a rúd lehajlása $d\alpha$ szöggel változik meg:

$$d(\Delta\alpha) = d\alpha = -\Delta\alpha_0\frac{2\pi}{\tau}\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \cdot dt.$$

A túlfolyáshoz ennyi idő alatt legalább a következő mennyiségű víznek kell a kanálba csorognia:

$$dm = -\frac{bh^2\varrho}{2\sin^2\beta}\,d\alpha = \frac{2\pi\Delta\alpha_0 bh^2\varrho\,dt}{2\tau\sin^2\beta}\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right).$$

Ennek maximuma $t = 0$-nál van, vagyis a túlfolyás akkor lesz folyamatos, ha a vízhozamra ($dm = \Phi\,dt$) teljesül, hogy

$$\Phi \geq \Phi_1 = \frac{\pi bh^2\varrho}{\tau\sin\beta}\Delta\alpha_0 = \frac{\pi bh^2\varrho}{\tau\sin\beta} \cdot \frac{2\pi}{360} \approx 0{,}23 \text{ kg/s},$$

ahol a rezgés 1°-os szögamplitúdóját $\dfrac{2\pi}{360}$ radián alakban írtuk fel.

3.3. *Mekkora minimális vízhozam esetén nem működik a mozsár?* Ha a kanál eléri a 20,6°-os dőlési szöget, miközben mindvégig túlcsordul, akkor benne 1 kg víz lesz, és a rezgési amplitúdója $23{,}6^\circ - 20{,}6^\circ = 3^\circ$-os lesz. Eltekintve a rendszer tehetetlenségi nyomatékának változásától (amit a növekvő vízmennyiség okoz), a háromszoros amplitúdó háromszoros vízhozamot is jelent: $\Phi_2 = 3\Phi_1 \approx 0{,}7$ kg/s. Ennél nagyobb vízhozam esetén a rizshántoló mozsár nem tud működni.