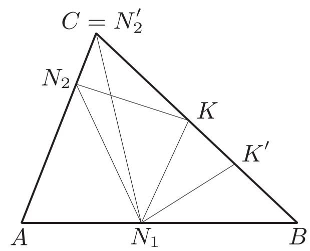
Megoldás. Ha Nóra az $N_1 = A$ vagy $N_1 = B$ pontot választaná, akkor Kristóf a K pontot a C, illetve B ponthoz elegendően közel választva elérheti, hogy N_1KN_2 háromszög területe 0-hoz tetszőlegesen közel legyen, attól függetlenül, hogy Nóra hol jelöli ki AC oldalon az N_2 pontot.

Tehát Nórának az AB oldal belsejében kell kijelölnie az N_1 pontot.

Tegyük fel, hogy Nóra választása esetén $AN_1 = \lambda AB$ $(0 < \lambda < 1)$. A továbbiakban meg fogjuk mutatni, hogy ekkor Kristófnak a legjobb játékstratégiája esetén úgy kell megválasztania a BC oldalon a K pontot, hogy $N_1K \parallel AC$ teljesüljön. Ebben ez esetben Nóra akárhol is adja meg az AC oldalon az N_2 pontot, mindig azonos területhez fog jutni, mivel az N_1KN_2 háromszögben az N_1K oldalhoz tartozó magasság mindenképpen a két párhuzamos egyenes távolsága lesz.

Ha Kristóf a BC oldalon olyan K' pontot választana, melyre $BK' < BK$, akkor például Nóra $N_2' = C$ választása esetén az $N_1K'C$ háromszög tartalmazza az N_1KC háromszöget, ezért $T(N_1KN_2\triangle) = T(N_1KC\triangle) < T(N_1K'C\triangle)$, emiatt Kristóf nem a legjobb stratégiát választaná (*1. ábra*).

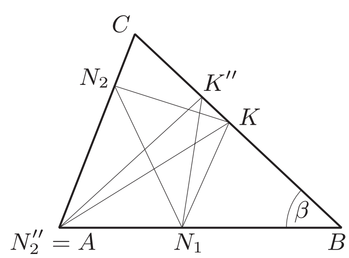


1. ábra

Ha Kristóf a BC oldalon olyan K'' pontot választana, melyre $BK'' > BK$, akkor például Nóra $N_2'' = A$ választása esetén

$$T(N_1KN_2\triangle) = T(N_1KA\triangle) < T(N_1K''A\triangle).$$

A két utóbbi háromszög AN_1 oldala közös, és az ehhez tartozó magasság az utóbbi háromszögnél nagyobb (*2. ábra*).



2. ábra

(Az ábrán β hegyesszög, de a fenti megállapítások $\beta = 90°$ és $\beta > 90°$ esetén is érvényesek.)

Így beláttuk, hogy Kristófnak mindenképpen úgy kell megválasztani a BC oldalon a K pontot, hogy $N_1K \parallel AC$ legyen, és ekkor a Nóra által a CA oldalon megadott N_2 ponttól már független az N_1KN_2 háromszög területe.

Tehát a helyes játékstratégia esetén λ jó megválasztásától függ az N_1KN_2 háromszög területének maximuma.

$N_1K \parallel AC$ miatt $N_1BK\triangle$ és $ABC\triangle$ hasonló, mivel $KN_1B\sphericalangle = CAB\sphericalangle$ és $BKN_1\sphericalangle = BCA\sphericalangle$ (*3. ábra*).

Mivel $N_1B = (1-\lambda)AB$, a korábban megállapított hasonlóság alapján $N_1K = (1-\lambda)AC = (1-\lambda)b$, és az $N_1BK\triangle$-ben a B csúcshoz tartozó magasság hossza $(1-\lambda)\cdot m_b$.

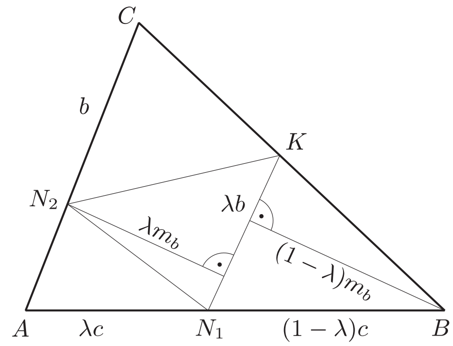
Így az N_1K és az AC párhuzamos oldalak távolsága $m_b - (1-\lambda)m_b = \lambda m_b$, ezért az N_1KN_2 háromszög területe:

$$\frac{(1-\lambda)b \cdot \lambda m_b}{2} = \lambda(1-\lambda)T_{ABC\triangle}.$$

A számtani és a mértani közép közti összefüggés alapján:

$$\lambda(1-\lambda) \leq \left[\frac{\lambda + (1-\lambda)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}.$$

Az egyenlőség $\lambda = 1 - \lambda$, azaz $\lambda = \dfrac{1}{2}$ esetén teljesül.



3. ábra

Tehát a helyes játékstratégia esetén:
– Nóra az AB oldal felezőpontját választja N_1-nek;
– Kristóf a BC oldal felezőpontját választja K-nak (N_1K középvonal $\parallel AC$);
– Végül Nóra tetszőleges N_2 pontot jelöl ki az AC oldalon.

Így az N_1KN_2 háromszög területe az ABC háromszög területének $\dfrac{1}{4}$-ed része.