Megoldás. Legyen $k+\frac{n}{k}=f(n,k)$, ennek – adott n-re – a minimumát jelölje $f(n)$. Ez a minimum mindig létezik, hiszen $k\in\mathbb{N}$ és rögzített n mellett $f(n,k)$ egy adott számnál kisebb értéket csak véges sok helyen vehet fel. Észrevehetjük továbbá, hogy a bizonyítandó azonosság bal oldala – az egészrész függvény monoton növekedése amiatt – éppen $\big[f(n)\big]$.

Minden k-ra nyilván $k+\frac{n}{k}<k+\frac{n+1}{k}$; ezért $f(n,k)<f(n+1,k)$, és így $f(n)<f(n+1)$.

Megmutatjuk, hogy $f\big(m(m+1)\big)=2m+1$. Egyrészt minden pozitív egész számra

$$a+\frac{m^2+m}{a}\geq 2m+1,$$

mivel az a-val történő szorzás révén ez ekvivalens a nyilvánvalóan fennálló $(a-m)^2\geq a-m$ egyenlőtlenséggel. Másrészt látható, hogy egyenlőség is teljesülhet, mégpedig pontosan akkor, ha $a=m$ vagy $a=m+1$. Hasonlóan láthatjuk be, hogy $f(m^2)=2m$: hiszen $a+\frac{m^2}{a}\geq 2m$ ekvivalens $(a-m)^2\geq 0$-val, ahol egyenlőség az $a=m$ esetben következik be.

Tekintsük ezután az 1^2, $1\cdot 2$, 2^2, $2\cdot 3$, $\ldots$, $(n-1)n$, n^2, $n(n+1)$, $\ldots$ számokból álló (c_n) sorozatot, amelyen az f függvény értékei rendre: $2,3,4,5,\ldots$. Ha n tetszőleges pozitív egész, akkor létezik, mégpedig egyértelműen olyan t index, amelyre $c_t\leq n<c_{t+1}$; mivel $f(c_t)$ és $f(c_{t+1})$ egymást követő (pozitív) egészek, azért

$$\big[f(n)\big]=f(c_t).$$

Ugyanezek az összefüggések a $g(n)=\big[\sqrt{4n+1}\,\big]$ függvényre is fennállnak:

$$g(m^2)=\big[\sqrt{4m^2+1}\,\big]=2m=f(m^2),$$

hiszen $(2m)^2<4m^2+1<4m^2+4m+1=(2m+1)^2$. Hasonlóan

$$g\big(m(m+1)\big)=\big[\sqrt{4m(m+1)+1}\,\big]=\Big[\sqrt{(2m+1)^2}\,\Big]=2m+1=f\big(m(m+1)\big).$$

Így, ha $c_t\leq n<c_{t+1}$, akkor az egész számokból álló $\big(g(n)\big)$ sorozat monoton növekedése miatt ugyancsak $g(n)=g(c_t)=f(c_t)=\big[f(n)\big]$, azaz $g(n)=\big[f(n)\big]$ – ami a feladat állítását bizonyítja.

Megjegyzés. A feladatra legelőször rápillantva óhatatlanul a kéttagú számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség juthat eszünkbe: pozitív a, b számokra $a+b\geq 2\sqrt{ab}$. Ennek jól ismert következménye, hogy ha $ab=c$ állandó, úgy $a+b$ akkor a legkisebb, ha $a=b=\sqrt{c}$. Mivel a feladatban a csak egész szám lehet, hajlamosak lehetünk az iménti elvet a következőképpen „általánosítani”: $a+b$ annál kisebb, minél közelebb van a a $\sqrt{c}$-hez. Meglepő lehet, de ez a sejtés így, általában hamis: pl. $c=20$, $a_1=3$, $a_2=6$ esetén

$$\big|3-\sqrt{20}\,\big|<\big|6-\sqrt{20}\,\big|,\qquad\text{de}\qquad 3+\frac{20}{3}>6+\frac{20}{6}.$$