Megoldás. A feladatban szereplő szám $S = \dfrac{10^{5^n} - 1}{9}$, és nyilván nem osztható 3-mal (hiszen számjegyeinek összege 5^n, ami nem osztható 3-mal). Azt fogjuk megmutatni, hogy a $10^{5^n} - 1$ szám minden 3-nál nagyobb prímosztója 1-esre végződik. (Ez nyilván elegendő, mivel S sem 2-vel, sem pedig 3-mal nem osztható, és minden 1-nél nagyobb osztója prímosztók szorzatára bontható; 1-re végződő számok szorzata pedig szintén 1-re végződik.)

Legyen m és k pozitív egész, c pedig olyan egész szám, amelyre $m \mid c^k - 1$. Jelölje r azt a legkisebb pozitív egészet, amelyre $m \mid c^r - 1$; megmutatjuk, hogy ekkor $r \mid k$. A k szerinti indukcióval bizonyítunk: $k = r$-re az állítás nyilvánvalóan igaz; tegyük föl, hogy minden olyan, k-nál kisebb v természetes számra, amelyre $m \mid c^v - 1$ fennáll, egyúttal $r \mid v$ is teljesül. Az m nyilván osztója a

$$(c^k - 1) - (c^r - 1) = c^r(c^{k-r} - 1)$$

különbségnek is. Mivel $m \mid c^k - 1$, azért c^k, és így c minden hatványa is relatív prím az m-hez; így $c^{k-r} - 1$ is osztható m-mel. Indukciós feltevésünk értelmében $k - r$ osztható r-rel, de akkor k is.

Legyen ezután p a $\left(10^{5^n} - 1\right)$-nek egy, a 3-nál nagyobb prímosztója, és jelölje r a legkisebb pozitív egészet, amelyre $p \mid 10^r - 1$. Mint beláttuk, ekkor $r \mid 5^n$, tehát $r = 5^s$. Mivel $p > 3$, az r nagyobb 1-nél, így $5 \mid r$. Alkalmazzuk p-re és 10-re (amely a p-hez nyilvánvalóan relatív prím) a kis Fermat-tételt, miszerint $p \mid 10^{p-1} - 1$. Az előbbihez hasonlóan kapjuk, hogy $p - 1$ osztható az r-rel, speciálisan 5-tel is. Mivel p nem a 2, azért $p - 1$ a 2-vel is osztható, ebből pedig következik, hogy $p - 1$ osztható $5 \cdot 2 = 10$-zel. Ez éppen azt jelenti, hogy p a 10-es alapú számrendszerben 1-esre végződik.