**Tomon István megoldása. Lemma:** *Ha egy $ABCD$ négyszögnél létezik az $\omega$ kör, akkor*

$$AB + AD = CB + CD.$$

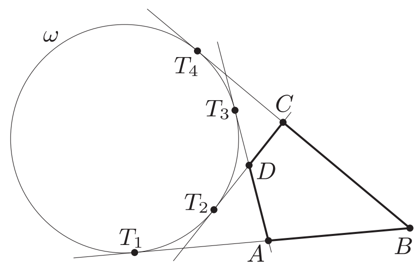
**Bizonyítás:** Legyenek az $\omega$ kör érintési pontjai az oldalegyenesekkel az *ábrán* látható módon $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$. Ekkor felhasználva, hogy egy adott pontból a körhöz húzott érintőknek hossza megegyezik, azt kapjuk, hogy

$$BT_4 = BT_1. \tag{1}$$

Ezen kívül a következő egyenlőséglánc teljesül:

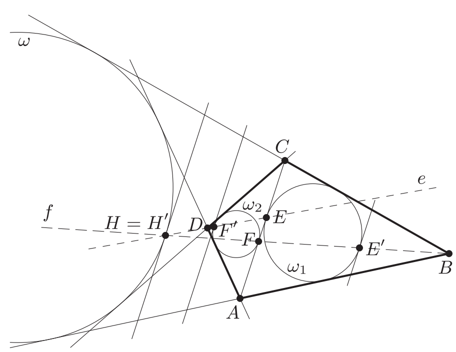
$$\begin{aligned} BT_4 &= BC + CT_4 = BC + CT_2 = BC + CD + DT_2 = BC + CD + DT_3 = \\ &= BC + CD + AT_3 - AD = BC + CD + AT_1 - AD = \\ &= BC + CD + BT_1 - AD - AB. \end{aligned}$$

Ezt összevetve (1)-gyel azt kapjuk, hogy $BC + CD = AB + AD$, s ezzel a Lemmát bebizonyítottuk.




Most térjünk rá a feladat bizonyítására. Húzzuk meg az $\omega_1$ kör $AC$-től különböző, $AC$-vel párhuzamos érintőjét, érintse ez $\omega_1$-et az $E'$ pontban. $\omega_1$ és $AC$ érintési pontja legyen $E$, $\omega_2$ és $AC$ érintési pontja $F$, ezen kívül húzzuk meg az $\omega$ körnek az $AC$-vel párhuzamos érintőjét, amely elválasztja $B$-t $\omega$-tól, érintse ez $\omega$-t a $H$ pontban.

Az ismert összefüggés alapján $CE = \dfrac{-AB + BC + CA}{2}$ és $AF = \dfrac{-CD + AD + AC}{2}$, tehát a Lemma alapján $CE = AF$. Ez azt jelenti, hogy $F$ az $ABC$ háromszög $AC$ oldalához írt körnek az érintési pontja, tehát ha az $AC$-vel $E'$-n át húzott egyenest $B$-ből $AC$-be nyújtjuk, akkor $E'$ az $F$-be kerül, így $B$, $E'$, $F$ egy egyenesen vannak, tehát $B$, $E'$, $F$, $H$ egy egyenesen vannak.




Legyen $H'$ az $\omega_1$ és $\omega_2$ közös külső érintőinek metszéspontja. Ekkor a $H'$-ből az $\omega_2$-t az $\omega_1$ körbe nagyíthatjuk, s ekkor az $F$ pont az $E'$ pontba megy át, így $H'$, $F$, $E'$ egy egyenesen vannak. Vagyis $B$, $E'$, $F$, $H$, $H'$ egy egyenesen vannak, azaz nézzük csak azt, hogy $B$, $F$, $H$, $H'$ egy $f$ egyenesen vannak. Hasonlóan, ha $D$-t tekintjük a nyújtás középpontjának, akkor $H$, $D$, $F'$, $E$ egy egyenesen vannak. Tekintsük újra a $H'$-ből az $\omega_2$ nagyítását $\omega_1$-be. Ekkor az $F'$ pont $E$-be megy át, így $H'$, $F'$, $E$ egy egyenesen vannak. Tehát $H'$, $H$, $D$, $E$ egy $e$ egyenesen vannak. A $BA \neq BC$ feltétel biztosítja, hogy a $BF$ egyenes nem azonos a $DE$ egyenessel. Ezért az $e$ és az $f$ egyenesek különbözők, tehát csak egyetlen közös pontjuk van. Így szükségképpen $H = H'$, s mivel $H$ rajta van a körön, így $H'$ is, s ezzel az állítást bebizonyítottuk.