

Eisenberger András megoldása. $N/M = 2^{k-n}$.

Alkossunk egy megfeleltetést úgy, hogy minden M -beli sorozatot 2^{k-n} db N -belinek feleltetünk meg úgy, hogy minden N -belit pontosan egyszer kapjunk meg.

Vegyünk egy M -beli m sorozatot. (Ebben a sorozatban tehát 1-től n -ig minden lámpát páratlan sokszor kapcsolunk át.) Induljunk el sorban a sorozat lépésein. Amikor olyan lámpát kapcsolnánk át (legyen az i . lámpa), amit m szerint még egy későbbi lépésben is kapcsolunk majd, akkor kétféleképp folytathatjuk: az i . lámpát vagy az $(n+i)$. lámpát kapcsoljuk, ezután tovább megyünk a következő lépésre. Ha nem ilyen a lépés, tehát m -ben már többször nem kapcsolnánk ezt a lámpát, akkor megnézzük, hogy eddig hányszor kapcsoltuk az i . lámpát. Ha páros sokszor, akkor most is az i . lámpát kapcsoljuk, ha páratlan sokszor, akkor az $(n+i)$. lámpát (itt tehát nincs választásunk). Ezzel a módszerrel a végén az i . lámpa biztosan be lesz kapcsolva, az $(n+i)$. pedig biztosan ki, mivel az eredeti sorozatban és most is az i . páratlan sokszor szerepelt, így most az $(n+i)$. lámpát biztosan páros sokszor kapcsoltuk. Mindamellett az eredeti sorozathoz hasonlóan k lépést hajtottunk végre, ezért az így kapott sorozat N eleme.

A sorozat alkotása során az első n lámpát legalább egyszer kapcsoltuk, így n olyan lépés volt, amikor valamelyiket utoljára kapcsoltuk, tehát a maradék $(k-n)$ lépés volt az a fajta, ahol választásunk volt. Vagyis az M minden eleméhez az N -nek 2^{k-n} elemét rendeltük. Már csak azt kell megmutatnunk, hogy N minden elemét pontosan egyszer kaptuk meg. Ez azért igaz, mert ha veszünk egy sorozatot N -ből, és minden olyan kapcsolás helyett, ahol az $(n+i)$. lámpát kapcsolnánk, az i . lámpát kapcsoljuk, akkor megkapjuk M -nek azt az egyetlen sorozatát, amiből ezt az N -beli sorozatot kaphatjuk. És az is egyértelmű, hogy melyik döntésnél hogyan kell döntenünk ahhoz, hogy ezt kaphassuk.