Kiss Viktor megoldása. Helyettesítsük be $w = x = y = z = 1$-et. Teljesül az $wx = yz$ feltétel, tehát

$$\frac{2f^2(1)}{2f(1)} = \frac{1^2+1^2}{1^2+1^2} = 1.$$

$f(1) > 0$, tehát egyszerűsíthetünk vele, kapjuk, hogy $f(1) = 1$. Ezután helyettesítsünk be $w = 1$, $x = a$, $y = z = \sqrt{a}$-t, ahol a tetszőleges pozitív valós szám. Teljesül, hogy $wx = yz$, tehát

$$\frac{f^2(1)+f^2(a)}{2f(a)} = \frac{1+f^2(a)}{2f(a)} = \frac{1+a^2}{2a}.$$

$f(a)$ és a is pozitív, tehát szorozhatunk velük, kapjuk, hogy

$$a\big(1+f^2(a)\big) = f(a)(1+a^2),$$

azaz

$$f^2(a)\cdot a - f(a)(1+a^2) + a = 0.$$

Ez másodfokú egyenlet $f(a)$-ra, megoldásai a következők:

$$f(a) = \frac{1+a^2 \pm \sqrt{(1+a^2)^2-4a^2}}{2a} = \frac{1+a^2 \pm \sqrt{1+a^4-2a^2}}{2a}.$$

Ha $a \geq 1$, akkor

$$f(a) = \frac{1+a^2 \pm \sqrt{(a^2-1)^2}}{2a} = \frac{1+a^2 \pm (a^2-1)}{2a} = a \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{a}.$$

Ha $a < 1$, akkor

$$f(a) = \frac{1+a^2 \pm \sqrt{(1-a^2)^2}}{2a} = \frac{1+a^2 \pm (1-a^2)}{2a} = a \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{a}.$$

Tehát megkaptuk, hogy $f(a)$ értéke tetszőleges a-ra a vagy $\frac{1}{a}$. Tegyük fel, hogy létezik $a, b \neq 1$, hogy

$$f(a) = a \quad \text{és} \quad f(b) = \frac{1}{b}.$$

Helyettesítsünk be $w = a$, $x = b$, $y = 1$, $z = ab$-t.

I. eset: $f(a^2b^2) = a^2b^2$. Ekkor

$$\frac{f^2(a)+f^2(b)}{f(1^2)+f(a^2b^2)} = \frac{a^2+\frac{1}{b^2}}{1+a^2b^2} = \frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2},$$

ami nem lehet, hiszen $b \neq 1$ és pozitív, tehát $b^2 \neq \frac{1}{b^2}$.

II. eset: $f(a^2b^2) = \frac{1}{a^2b^2}$. Ekkor

$$\frac{f^2(a)+f^2(b)}{f(1^2)+f(a^2b^2)} = \frac{a^2+\frac{1}{b^2}}{1+\frac{1}{a^2b^2}} = \frac{a^4b^2+a^2}{a^2b^2+1} = \frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2},$$

ami csak akkor teljesülhetne, ha $a^4 = 1$ teljesülne (hiszen a pozitív), de ez nem igaz. Tehát megkaptuk, hogy vagy minden $a \neq 1$-re $f(a) = a$, vagy minden $a \neq 1$-re $f(a) = \frac{1}{a}$ (mivel $f(1) = 1$, azért a két szóba jövő függvény az $f(x) = x$ és az $f(x) = \frac{1}{x}$). Most belátjuk, hogy mindkét függvény teljesíti a feladat feltételeit. Ha az $f(x) = x$-et tekintjük, akkor

$$\frac{f^2(w)+f^2(x)}{f(y^2)+f(z^2)} = \frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

triviálisan teljesül.

Ha $f(x) = \frac{1}{x}$, akkor

$$\frac{f^2(w)+f^2(x)}{f(y^2)+f(z^2)} = \frac{\frac{1}{w^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}} \qquad \Big| \cdot \frac{w^2x^2}{y^2z^2}$$

$$\frac{x^2y^2z^2+w^2y^2z^2}{z^2x^2w^2+y^2x^2w^2} = \frac{(x^2+w^2)y^2z^2}{(y^2+z^2)x^2w^2} = \frac{x^2+w^2}{y^2+z^2} \qquad \text{(hiszen } wx = yz\text{)}.$$

Tehát csak az $f(x) = x$ és $f(x) = \frac{1}{x}$ függvények teljesítik a feladat feltételeit, és ezek valóban teljesítik azokat.