Korándi Dániel megoldása. Legyen $a=\dfrac{x}{1-x}$, $b=\dfrac{y}{1-y}$, $c=\dfrac{z}{1-z}$.

$$abc=\frac{xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)}=\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}=$$
$$=(a+1)(b+1)(c+1),$$

azaz

$$(a+1)(b+1)(c+1)-abc=ab+ac+bc+a+b+c+1=0. \tag{1}$$

Ugyanakkor

$$(a+b+c+1)^2=a^2+b^2+c^2+1+2(ab+ac+bc+a+b+c)= \tag{2}$$
$$=a^2+b^2+c^2-1.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $a^2+b^2+c^2-1\geq 0$, a feladat (a) része pedig pont ezt kérdezi.

A (b) rész végtelen sok olyan (x,y,z) racionális számokból álló hármast keres, amire $xyz=1$ és felhasználva (2)-t, $a+b+c+1=0$. (1) szerint $a+b+c+1=0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $ab+ac+bc=0$, ami ekvivalens $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$-val, mivel $abc\neq 0$. (x, y, z egyike sem 0, mivel a szorzat 1. Ekkor viszont a, b, c sem lehet 0.) Visszaírva a, b, c értékét:

$$\frac{1-x}{x}+\frac{1-y}{y}+\frac{1-z}{z}=0.$$

3-at hozzáadva mindkét oldalhoz:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=yz+xz+xz=3.$$

Azaz olyan számhármasokat keresünk, amire $xyz=1$ és $xy+xz+yz=3$, valamint $x,y,z\neq 1$.

Írjunk be x helyébe $\dfrac{1}{yz}$-t. $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}+yz=3$ racionális megoldásait keressük. Szorozva yz-vel egy másodfokú egyenletet kapunk y-ra:

$$z^2y^2+(1-3z)y+z=0.$$

Olyan racionális z-t keresünk, amire ennek az egyenletnek a gyökei is racionálisak, ehhez az kell, hogy a diszkrimináns egy racionális szám négyzete legyen:

$$D=(1-3z)^2-4z^3=-4z^3+9z^2-6z+1=(z-1)(-4z^2+5z-1)=$$
$$=(z-1)^2(1-4z).$$

Mivel y racionális, azért $(z-1)^2$ egy racionális szám négyzete, így szükséges, hogy $1-4z$ is egy racionális szám négyzete legyen. Ehhez viszont tetszőleges racionális q-ra elég $z=\dfrac{1-q^2}{4}$-et választani. Ekkor y is racionális lesz, s így $x=\dfrac{1}{yz}$ is. Tehát van végtelen sok racionális megoldás. Ezzel igazoltuk a (b) részt is.