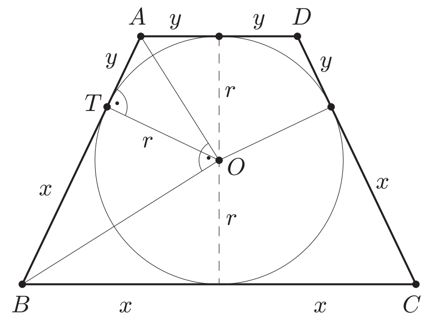
I. megoldás. Az $ABCD$ egyenlő szárú trapéz beírt körének középpontja legyen O, az AB száron lévő érintési pont T, az érintőszakaszokat pedig jelölje x és y. Ekkor $2 \cdot OAT\sphericalangle + 2 \cdot OBT\sphericalangle = 180°$, amiből $OAT\sphericalangle + OBT\sphericalangle = 90°$ és így $AOB\sphericalangle = 90°$.



Az AOB derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság r, a beírt kör sugara. Alkalmazva a magasság tételt: $r^2 = x \cdot y$; ezt 4-gyel szorozva: $(2r)^2 = 2x \cdot 2y$ vagyis $2r = \sqrt{2x \cdot 2y}$, ahol $2r$ a trapéz magassága, $2x$ illetve $2y$ pedig az alapok hossza. Tehát a trapéz magassága mértani közepe az alapoknak.

II. megoldás. A trapéz alapjai legyenek a és c, szárai pedig b hosszúak. A szimmetrikus trapéz mindenképpen húrnégyszög, így fel lehet rá írni a húrnégyszögekre vonatkozó területképletet:

$$T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \sqrt{(s-a)(s-b)^2(s-c)},$$

ahol s a fél kerület.

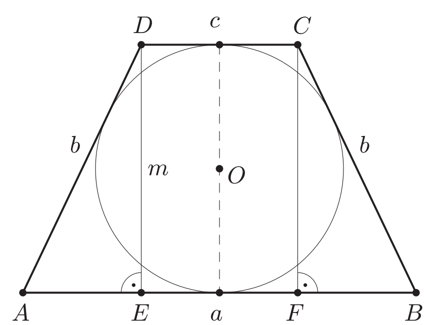
Az érintőnégyszögekre vonatkozó területképlet alapján: $T = s \cdot r = s \cdot \dfrac{m}{2}$, hiszen a trapéz magassága $m = 2r$.

Az érintőnégyszög szemközti oldalainak összege egyenlő, tehát $s = a + c = 2b$. Emiatt $s - a = c$, $s - b = b$ és $s - c = a$. Ezek alapján

$$T = s \cdot \frac{m}{2} = \sqrt{cb^2a} = b\sqrt{ac},$$

amibe $s = 2b$-t beírva: $m = \sqrt{ac}$.

III. megoldás. Mivel a négyszög érintőnégyszög, szemközti oldalainak összege megegyezik: $a + c = b + d$, és mivel szimmetrikus a trapéz, azért $b = d$.



Vagyis $a + c = 2b$, amiből

$$AD = b = \frac{a+c}{2}.$$

A D és C csúcsokból állítsunk merőlegeseket az AB alapra, a talppontokat jelölje E és F. Ekkor $AE = BF = \dfrac{a-c}{2}$.

Az AED háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt: $AD^2 = AE^2 + DE^2$, vagyis

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + m^2, \quad \text{azaz} \quad \frac{a^2+2ac+c^2}{4} = \frac{a^2-2ac+c^2}{4} + m^2,$$

ahonnan $m^2 = ac$, tehát $m = \sqrt{ac}$.