I. megoldás. Egy harmadfokú egyenletnek mindig van legalább egy valós gyöke, legyen ez b; látható, hogy $b \neq 1$. Megmutatjuk, hogy akkor az egyenletnek $\dfrac{1}{1-b}$ is gyöke:

$$\left(\frac{1}{1-b}\right)^3 - \left(\frac{1}{1-b}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{1-b} + 1 \stackrel{?}{=} 0.$$

Alakítsuk át az egyenletet. Az $(1-b)^3$-nal az egyenlet oldalait beszorozva:

$$1 - (1-b) - 2(1-b)^2 + (1-b)^3 \stackrel{?}{=} 0.$$

A zárójeleket kibontva és összevonás után kapjuk, hogy

$$-1 + 2b + b^2 - b^3 = 0,$$

ami megegyezik az eredeti egyenlettel, tehát az egyenletnek b mellett az $\dfrac{1}{1-b}$ is gyöke.

Mivel $a = \dfrac{1}{1-b}$, az egyenlet két valós gyökére valóban igaz, hogy $a - ab = 1$.

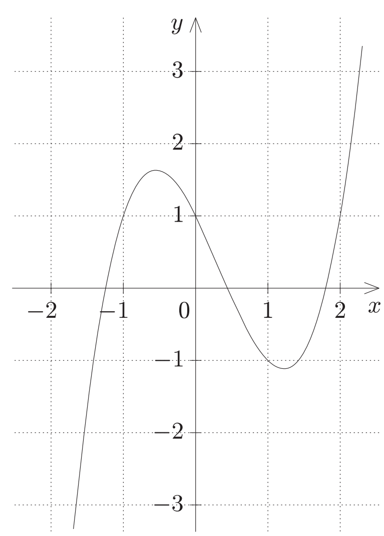
II. megoldás. Az egyenlet bal oldalát alkotó harmadfokú függvény értéke -2-ben -7, -1-ben 1, 0-ban 1, 1-ben -1, 2-ben pedig ismét 1; ezért biztosan van (valós) gyöke -2 és 0 között, 0 és 1 között valamint 1 és 2 között. Ezek szerint az egyenletnek három valós gyöke van, x_1, x_2, x_3. Tekintsük a

$$P = (1 - x_1 + x_1x_2)(1 - x_3 + x_3x_2)$$

szorzatot. A beszorzást elvégezve, a Viète-formulák szerint:

$$\begin{aligned}
P &= 1 - x_3 + x_3x_2 - x_1 + x_3x_1 - x_1x_2x_3 + \\
&\quad + x_1x_2 - x_1x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 = \\
&= 1 - (x_1 + x_2 + x_3) + x_2 + \\
&\quad + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 2x_1x_2x_3 + (x_1x_2x_3)x_2 = \\
&= 1 - 1 + x_2 - 2 - 2(-1) + (-1)x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Mivel a P szorzat nulla, valamelyik tényezője nulla – ezt akartuk belátni.



Megjegyzés. Mindkét bizonyításból kiolvasható, hogy amelyik P-beli tényező nulla, abban ciklikusan permutálva a gyököket ugyancsak nullát kapunk. Belátható továbbá még az is, hogy ha például $x_1 > x_2 > x_3$, akkor

$$x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_2x_3 = x_3 - x_3x_1 = 1.$$