I. megoldás. A szabályos $2n$ oldalú sokszög köré kör írható. Az *ábra* alapján meghatározhatjuk a szükséges szögeket:

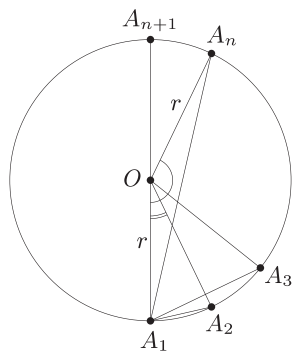
$$A_1OA_2 = \frac{360°}{2n} = \frac{180°}{n},$$

$$A_1OA_3 = \frac{360°}{n},$$

$$A_1OA_n = \frac{(n-1)\cdot 360°}{2n} = \frac{(n-1)\cdot 180°}{n}.$$

Az OA_1A_2 egyenlő szárú háromszögből:

$$A_1A_2 = 2r\cdot\sin\frac{90°}{n}.$$



Az OA_1A_3 egyenlőszárú háromszögből: $A_1A_3 = 2r\cdot\sin\dfrac{180°}{n}$. Az OA_1A_n egyenlőszárú háromszögből pedig:

$$A_1A_n = 2r\cdot\sin\frac{(n-1)\cdot 90°}{n} = 2r\cdot\sin\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 90°\right] =$$

$$= 2r\cdot\sin\left[90° - \frac{90°}{n}\right] = 2r\cdot\cos\frac{90°}{n}.$$

Az $\alpha = \dfrac{90°}{n}$ jelölést bevezetve, a feladat állítása:

$$\frac{1}{4r^2\sin^2\alpha} + \frac{1}{4r^2\cos^2\alpha} = \frac{4}{4r^2\sin^2 2\alpha}.$$

Mindkét oldalt $4r^2$-el szorozva:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{4}{\sin^2 2\alpha}.$$

Közös nevezőre hozva és felhasználva, hogy $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$:

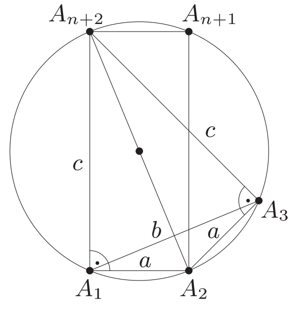
$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha} = \frac{4}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha},$$

és mivel $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, azért

$$\frac{1}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}.$$

Mivel ez a bizonyítandó összefüggéssel ekvivalens, az állítást beláttuk.

II. megoldás. Egy $2n$ oldalú szabályos sokszögnek az A_1 csúcsával szemközt az A_{n+1}, az A_2-vel szemben pedig az A_{n+2} csúcsa van. Ezért $A_1A_2 \parallel A_{n+1}A_{n+2}$ és $A_1A_2 = A_{n+1}A_{n+2}$ miatt $A_1A_{n+2} \parallel A_2A_{n+1}$ és $A_1A_{n+2} = A_2A_{n+1}$.



A szabályos sokszög forgásszimmetriája miatt $A_1A_n = A_2A_{n+1}$, valamint tengelyes tükrössége miatt $A_1A_{n+2} = A_3A_{n+2}$ (az A_2A_{n+2} szimmetria-tengely szerint). Legyen $A_1A_2 = A_2A_3 = A_{n+1}A_{n+2} = a$, $A_1A_3 = b$, $A_1A_{n+2} = A_2A_{n+1} = A_3A_{n+2} = c$.

A feladat bizonyítandó állítása:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{4}{b^2}\,.$$

A szabályos sokszög köré kör írható, ennek átmérője A_2A_{n+2}, így

$$A_2A_1A_{n+2}\sphericalangle = 90^\circ,$$

és mivel $A_1A_2A_{n+1}A_{n+2}$ paralelogramma, így téglalap is. Felírhatjuk Ptolemaiosz tételét az $A_1A_2A_3A_{n+2}$ húrnégyszögre:

$$ac + ac = b \cdot A_2A_{n+2},$$

vagyis $2ac = b \cdot A_2A_{n+2}$, amit négyzetre emelve:

$$4a^2c^2 = b^2 \cdot (A_2A_{n+2})^2.$$

Írjuk föl a Pitagorasz-tételt az $A_1A_2A_{n+2}$ háromszögre: $(A_2A_{n+2})^2 = a^2 + c^2$. Behelyettesítés és rendezés után: $4a^2c^2 = b^2 \cdot (a^2 + c^2)$,

$$\frac{4}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{a^2c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\,.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.