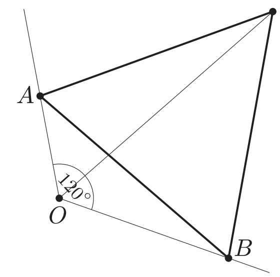
Megoldás. Mivel $AOB\sphericalangle + ACB\sphericalangle = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ minden olyan esetben, amikor $A \neq O$ és $B \neq O$, azért az elfajuló esettől eltekintve az $AOBC$ négyszög húrnégyszög. Ezért $CAB\sphericalangle = COB\sphericalangle = 60^\circ$, hiszen mindkettő a CB ívhez tartozó kerületi szög. Ebből következik, hogy C rajta van az $AOB\sphericalangle$ szögfelezőjén.

Az AOC háromszögben $ACO\sphericalangle < 60^\circ$, $CAO\sphericalangle > 60^\circ$ és $AOC\sphericalangle = 60^\circ$, ezért a háromszög legnagyobb oldala a $CAO\sphericalangle$-gel szemközti oldal, vagyis CO, ami így nagyobb $AC = 1$-nél.

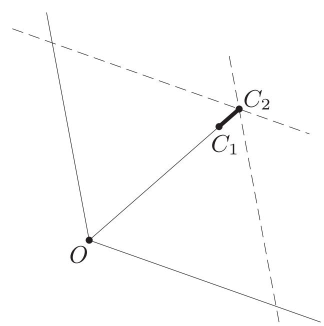


1. ábra

Tudjuk még, hogy $AC = BC = 1$, és így a C pont az OA és az OB félegyenestől is legfeljebb 1 távolságra van, méghozzá pontosan akkor 1 a távolság, amikor $AC \perp AO$ és $BC \perp BO$ – vagyis amikor $AB \perp OC$.

Ezt ábrázolva kapjuk, hogy a *2. ábrán* látható C_1C_2 szakasz pontjai lehetnek csak megfelelőek, ahol $OC_1 = 1$, az OC_2 szakasz hossza pedig

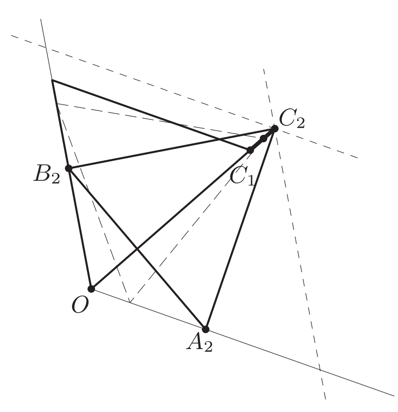
$$\frac{1}{OC_2} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{miatt:} \quad OC_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$



2. ábra

Beláttuk, hogy minden feltételnek megfelelő A és B esetén $C \in C_1C_2$.

Be kell még látni, hogy a C_1C_2 szakasz minden pontja jó, vagyis minden $C^* \in C_1C_2$ ponthoz létezik A^* és B^* a megfelelő szögszárakon úgy, hogy az $A^*B^*C^*\triangle$ szabályos és egységoldalú, valamint A^*B^* elválasztja egymástól az O és a C^* pontot.



3. ábra

C_1-et akkor kapjuk, ha $A^* = O$ vagy $B^* = O$ (a *3. ábrán* az így kapott $A_1B_1C_1\triangle$ látható: ekkor $A^* = A_1$). (Értelmezés kérdése, hogy ebben az esetben A^*B^* elválasztja-e O-t és C^*-ot.) C_2-t pedig akkor kapjuk, amikor $A^*B^* \perp OC^*$, az ábrán ez az $A_2B_2C_2\triangle$.

Ha a háromszöget folytonosan úgy mozgatjuk, hogy az A csúcs A_1-ből A_2-be kerüljön, akkor a C csúcs is folytonosan vándorol át a C_1 pontból C_2-be, vagyis az egész C_1C_2 szakaszt befutja. (Ha tovább mozgatjuk a háromszöget, amíg az A csúcs az O pontba ér, akkor a C csúcs a C_2 pontból a C_1-be mozogva még egyszer befutja a C_1C_2 szakaszt.)